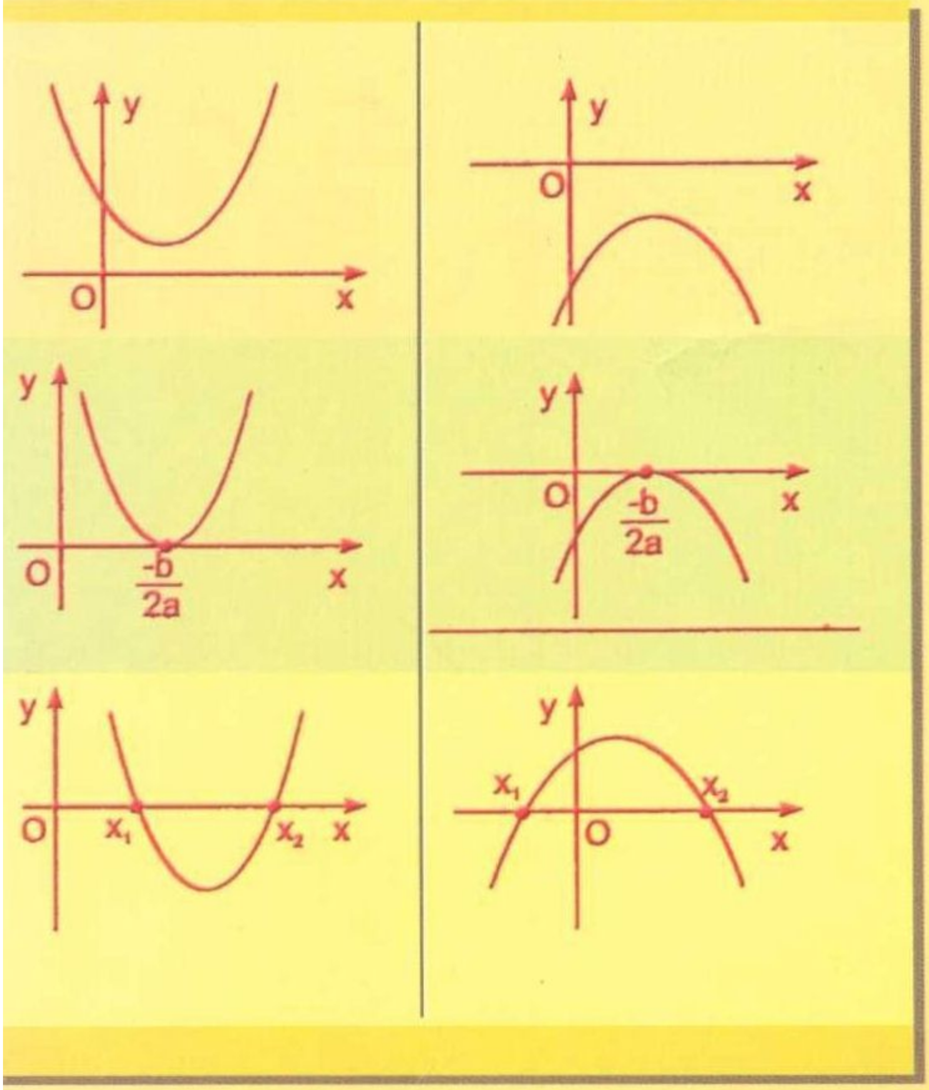
TS. VŨ THẾ HỰU

TOÁN 10

CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

TẬP MỘT


y
O
x
y
O
x
y
O
$\frac{-b}{2a}$
x
y
O
$\frac{-b}{2a}$
x
y
O
x_1
x_2
x
y
x_1
x_2
O
x

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TS. VŨ THẾ HỰU

TOÁN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

10

Tập 1

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

PHẦN I

KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ – BÀI TẬP

Chương I

MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

§1. Mệnh đề

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mệnh đề

Ta gọi là ***mệnh đề logic*** *hay* ***mệnh đề toán học****, nói gọn là* ***mệnh đề****, một câu khẳng định thỏa mãn các yêu cầu :*

1) Khẳng định hoặc đúng, hoặc sai (luật bài trung)

2) Không được vừa đúng, vừa sai (luật phi mâu thuẫn)

Các câu dạng như "Bông hoa đẹp quá", "Mở cửa ra" không phải là mệnh đề (logic).

2. Phủ định một mệnh đề

Mệnh đề có khẳng định trái ngược với khẳng định của mệnh đề A gọ là ***mệnh đề phủ định*** *của mệnh đề A, kí hiệu là* $\overline{A}$. *Như vậy :*

nếu A đúng thì $\overline{A}$ *sai*

nếu A sai thì $\overline{A}$ *đúng*

Ví dụ : A = *"2006 là số chia hết cho 3"*

$\overline{A}$ = *"2006 không chia hết cho 3".*

3. Mệnh đề kéo theo

Cho hai mệnh đề A và B. Mệnh đề : "Nếu A thì B" được gọi là mện đề kéo theo, kí hiệu là $A \Rightarrow B$.

Ví dụ : A = *"Tam giác ABC là tam giác cân"*

B = *"Tam giác ABC có hai đường trung tuyến bằng nhau"*

$A \Rightarrow B$ = *"Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì nó có hai đường trung tuyến bằng nhau"*

Mệnh đề $A \Rightarrow B$ *chỉ sai khi A đúng, B sai.*

4. Mệnh đề tương đương

Cho hai mệnh đề A và B. Một mệnh đề có dạng : "A $\Rightarrow$ B và B $\Rightarrow$ A" được gọi là mệnh đề tương đương, kí hiệu A $\Leftrightarrow$ B. Mệnh đề A $\Leftrightarrow$ B được phát biểu dưới dạng : "A nếu và chỉ nếu B" hay "A khi và chỉ khi B". Mệnh đề A $\Leftrightarrow$ B đúng khi A và B cùng đúng hay cùng sai.

Ví dụ : A = *"Số tự nhiên n chia hết cho 6"*

B = *"Số tự nhiên n chia hết cho 2 và chia hết cho 3"*

A $\Leftrightarrow$ B = *"Số n chia hết cho 6 khi và chỉ khi chia hết cho 2 và chia hết cho 3".*

5. Mệnh đề chứa biến

Mệnh đề chứa biến là câu khẳng định phụ thuộc vào một hay nhiều biến mà câu đó chỉ là một mệnh đề khi cho biến một giá trị xác định.

Ví dụ : "Số tự nhiên x chia hết cho 5" : Câu này không phải là mệnh đề.

Với $x = 15$ thì nó là một mệnh đề đúng. Với $x = 6$ thì nó là một mệnh đề sai.

6. Kí hiệu ∀ và kí hiệu ∃

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$, (x là biến). Câu khẳng định với mỗi giá trị bất kì của x thuộc tập hợp X thì $P(x)$ là mệnh đề đúng được kí hiệu là : $\forall x \in X : P(x)$

Câu khẳng định có ít nhất một giá trị x thuộc X mệnh đề $P(x)$ đúng được kí hiệu là : $\exists x \in X : P(x)$

Ta có : a) $\overline{\forall x \in X : P(x)} = \exists x \in X : \overline{P(x)}$.

b) $\overline{\exists x \in X : P(x)} = \forall x \in X : \overline{P(x)}$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.1. Trong các câu cho dưới đây, câu nào là mệnh đề :

a) Cuba là một nước thuộc châu Mĩ. **b)** x là một số chẵn.

c) Hôm qua bạn có đi học không ? **d)** Cho tôi mượn chiếc bút chì !

Hướng dẫn

a) Là câu khẳng định đúng. Đây là một mệnh đề. Hơn nữa câu này là một mệnh đề đúng.

b) Không phải là một mệnh đề bởi vì khẳng định của nó có thể đúng cũng có thể sai, phụ thuộc vào x là số nào.

c) **d)** Không phải là các mệnh đề. Bởi vì các câu này không có tính chất khẳng định.

1.2. Phát biểu mệnh đề A ⇒ B và xét tính đúng, sai của nó trong các trường hợp sau đây :

a) A = "Tam giác MPQ cân".

B = "Tam giác MPQ có hai đường cao bằng nhau".

b) A = "2004 chia hết cho 3".

B = "2005 chia hết cho 4".

Hướng dẫn

a) A ⇒ B = "Nếu tam giác MPQ cân thì nó có hai đường cao bằng nhau". Mệnh đề đúng.

b) A ⇒ B = "Nếu 2004 chia hết cho 3 thì 2005 chia hết cho 4". Trong trường hợp này A đúng, B sai. Do đó A ⇒ B sai.

1.3. Phát biểu mệnh đề A ⇔ B và xét tính đúng, sai của nó trong các trường hợp sau đây :

a) A = "Tam giác MPQ vuông".

B = "Tam giác MPQ có một góc bằng tổng hai góc còn lại".

b) A = "Tứ giác MNPQ là hình vuông".

B = "Tứ giác MNPQ có 4 cạnh bằng nhau".

Hướng dẫn

a) A ⇔ B = "Tam giác MPQ là tam giác vuông khi và chỉ khi (nếu và chỉ nếu) nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại" : Mệnh đề A ⇒ B đúng, mệnh đề B ⇒ A đúng. Vậy A ⇔ B đúng.

b) A ⇔ B = "Tứ giác MNPQ là hình vuông khi và chỉ khi (nếu và chỉ nếu) nó có 4 cạnh bằng nhau".

Mệnh đề A ⇒ B đúng. Mệnh đề B ⇒ A = "Tứ giác MNPQ có 4 cạnh bằng nhau thì nó là hình vuông". Mệnh đề B ⇒ A sai (hình thoi có góc nhọn có 4 cạnh bằng nhau không phải là hình vuông). Vậy A ⇔ B trên đây là sai.

1.4. Cho các mệnh đề chứa biến : P(n) = "n chia hết cho 6".

Q(n) = "n chia hết cho 3".

R(n) = P(n) ⇒ Q(n), S(n) = Q(n) ⇒ P(n)

a) Phát biểu mệnh đề : $\forall n \in N : R(n)$ và xét tính đúng sai của nó.

b) Phát biểu mệnh đề $\forall n \in N : S(n)$ và xét tính đúng sai của nó.

Hướng dẫn

a) $\forall x \in N : R(n)$ = "Một số tự nhiên chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3

Mệnh đề trên đúng. Vì n chia hết cho 6 thì $n = 6k$, $k \in N$, $6k = 3(2$
$2k \in N$. Vì vậy n chia hết cho 3.

b) $\forall x \in N : S(n)$ = "Số tự nhiên chia hết cho 3 thì nó chia hết cho
Mệnh đề này sai; ví dụ 21 chia hết cho 3 nhưng 21 không chia hết c
6.

Ghi chú : Để chứng minh : $\forall x \in X : P(x)$ là sai ta chỉ cần dẫn ra $\exists x \in$
$\overline{P(x)}$ đúng.

Muốn chứng minh $\exists x \in X : P(x)$ sai ta cần dẫn ra $\forall x \in X : \overline{P(x)}$ đúng

1.5. Cho mệnh đề : "Có số hữu tỉ x mà $x^2 = 2$".

a) Dùng kí hiệu để biểu thị mệnh đề trên.

b) Dùng kí hiệu và phát biểu bằng ngôn ngữ thông thường để diễn đ
phủ định của mệnh đề chứa biến trên.

Hướng dẫn

a) $\exists x \in Q : x^2 = 2$.

b) $\overline{\exists x \in Q : x^2 = 2} = \forall x \in Q : x^2 \neq 2$

Phát biểu : "Không có số hữu tỉ nào bình phương của nó bằng 2" hoặ
"Bình phương một số hữu tỉ bất kì đều khác 2".

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.6. Trong các câu dưới đây, câu nào là mệnh đề ?

a) Cậu làm bài tập chưa ?

b) $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ.

c) Đưa cho bạn chiếc thước kẻ.

d) $a + 1$ là số lẻ.

e) $a + b > 3$.

1.7. Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Tứ giác ABCD là hình bình hành.

b) Số π là số hữu tỉ.

c) Thổ Nhĩ Kì là một nước thuộc châu Âu.

d) Tất cả trẻ em trên 6 tuổi ở khu phố A đều đi học.

1.8. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy phát biểu mệnh đề A ⇒ B và nêu rõ tính đúng sai của nó.

a) A = "Tam giác MNP là tam giác vuông".

B = "Tam giác MNP có một đường trung tuyến bằng $\frac{1}{2}$ cạnh tương ứng".

b) A = "Tứ giác ABCD là hình vuông".

B = "Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc".

c) A = " $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

B = " $\sqrt{3}$ là số vô tỉ".

d) A = " $\sqrt{2}$ là số vô tỉ".

B = " $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ".

1.9. Biểu thị các mệnh đề sau bằng kí hiệu :

a) Bình phương của số tự nhiên thì lớn hơn số đó.

b) Có số hữu tỉ x sao cho $16x^2 - 1 = 0$.

c) Tồn tại số hữu tỉ mà bình phương của nó bằng 3.

d) Tam thức $x^2 - x + 1$ có giá trị dương với mọi giá trị thực của x.

1.10. Diễn đạt bằng kí hiệu và phát biểu bằng ngôn ngữ phủ định của mỗi mệnh đề sau :

a) Với mọi số nguyên dương n số $n^2 - 1$ chia hết cho 3.

b) Có một n tự nhiên mà $n^2 + 1$ không chia hết cho 3.

c) Với mọi giá trị thực của x tam thức $x^2 + x + 1$ có giá trị dương.

d) Có số tự nhiên n sao cho $n^2 + 1$ chia hết cho 4.

§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định lí

Trong toán học thường có dạng : A ⇒ B. A là ***giả thiết****, B là* ***kết luận****.*

2. Mệnh đề đảo

Mệnh đề đảo của mệnh đề A ⇒ B là mệnh đề B ⇒ A.

3. Định lí đảo

Một định lí dạng A ⇒ B là một mệnh đề đúng. Nếu mệnh đề đảo B ⇒ A cũng là một mệnh đề đúng thì ta bảo B ⇒ A là ***định lí đảo*** *của định lí A ⇒ B.*

Lưu ý rằng *A ⇒ B là mệnh đề đúng (là định lí), B ⇒ A có thể đúng, có thể sai.*

4. Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ

Khi A ⇒ B là mệnh đề đúng ta bảo A là ***điều kiện đủ*** *để B hay B là* ***điều kiện cần*** *để A.*

Nếu mệnh đề A ⇔ B đúng thì ta bảo A là ***điều kiện cần và đủ*** *để có B hay B là điều kiện cần và đủ để có A. Ta cũng nói "A khi và chỉ khi B", hay "A nếu và chỉ nếu B".*

5. Chứng minh định lí

Phương pháp trực tiếp *để chứng minh định lí : "A ⇒ B" như sau :*

- *Giả thiết A đúng.*
- *Sử dụng giả thiết và các kiến thức, các định lí đã biết, dùng các phép suy luận toán học để chỉ ra B đúng.*

Phương pháp gián tiếp *hay được dùng là* ***phương pháp phản chứng.***

Để chứng minh định lí A ⇒ B, phương pháp phản chứng thực hiện như sau :

- *Giả thiết A đúng và B sai.*
- *Dùng giả thiết và các suy luận để dẫn đến A sai. Như vậy A vừa đúng vừa sai.*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.11. Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi định lí sau đây và xét xem có phải là định lí đảo không ?

a) Một số (tự nhiên) có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì chia hết cho 3.

b) Một số (tự nhiên) có chữ số tận cùng là 0 thì chia hết cho 5.

Hướng dẫn

a) Mệnh đề đảo : "Một số chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3". Mệnh đề này đúng. Đó là định lí đảo của định lí đã nêu.

Ta chứng minh như sau :

Giả sử $x \in N$, $x = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$, trong đó $a_1, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ là các chữ số trong các chữ số 0, 1, 2, ..., 9 với $a_n \neq 0$.

Ta có :

$$
\begin{aligned}
x &= 10^{n}a_{n} + 10^{n-1}a_{n-1} + \ldots + 10a_{1} + a_{0}\\
&= \underbrace{99\ldots9}_{n-1\text{ chữ}}a_{n} + \underbrace{99\ldots9}_{n-2\text{ chữ}}a_{n-1} + \ldots + 9a_{1} + a_{n} + a_{n-1} + \ldots + a_{1} + a_{0}\\
&= 3(33\ldots3a_{n} + 33\ldots3a_{n-1} + \ldots + 3a_{1}) + a_{n} + a_{n-1} + \ldots + a_{1} + a_{0}
\end{aligned}
$$

Từ giả thiết x chia hết cho 3, hạng tử thứ nhất vế phải chia hết cho 3, suy ra $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ chia hết cho 3.

b) Mệnh đề đảo : "Một số chia hết cho 5 thì chữ số tận cùng là 0". Mệnh đề này sai. Ví dụ 15 chia hết cho 5 nhưng chữ số tận cùng khác 0. Mệnh đề này không phải là định lí đảo của định lí đã nêu.

1.12. Dùng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu lại các định lí sau đây :

a) Tổng của hai số là một số dương thì có ít nhất một trong hai số đó là số dương.

b) Trong mặt phẳng hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

Hướng dẫn

a) Điều kiện cần để tổng của hai số lớn hơn 0 là một trong hai số đó lớn hơn 0.

b) Điều kiện cần để hai đường thẳng trong mặt phẳng song song với nhau là chúng cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

1.13. Dùng thuật ngữ "điều kiện đủ" để phát biểu lại các định lí sau đây :

a) Tổng của hai số là một số dương thì ít nhất một trong hai số ấy là số dương.

b) Một tứ giác nội tiếp trong đường tròn thì tổng hai góc đối của nó bằng 180^0.

Hướng dẫn

a) Điều kiện đủ để trong hai số có ít nhất một số dương là tổng của hai số đó là số dương.

b) Điều kiện đủ để tổng hai góc đối một tứ giác bằng 180^0 là nó nội tiếp được trong một đường tròn.

1.14. Trong các định lí cho dưới đây, định lí nào có định lí đảo ? Trong trường hợp có định lí đảo, hãy phát biểu định lí đã cho với thuật ngữ "điều kiện cần và đủ".

a) Nếu tứ giác T là hình thoi thì hai đường chéo của T vuông góc với nhau.

b) Trong một đường tròn (hay hai đường tròn bằng nhau) nếu hai dây cung bằng nhau thì nó cách đều tâm.

Hướng dẫn

a) Mệnh đề đảo của định lí là : "Nếu tứ giác T có hai đường chéo vuông góc thì T là hình thoi". Mệnh đề này sai. Vậy định lí đã nêu không có định lí đảo.

b) Mệnh đề đảo của định lí đã nêu : "Hai dây cung của một đường tròn (hoặc hai đường tròn bằng nhau) cách đều tâm đường tròn thì bằng nhau". Mệnh đề này đúng và là định lí đảo của định lí đã nêu. Định lí đã cho có thể phát biểu 4 cách như sau :

"Điều kiện cần và đủ để hai dây cung của một đường tròn bằng nhau là chúng cách đều tâm của đường tròn".

"Điều kiện cần và đủ để hai dây cung của một đường tròn cách đều tâm đường tròn là chúng bằng nhau".

"Hai dây cung của một đường tròn bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm của đường tròn".

"Hai dây cung của một đường tròn bằng nhau nếu và chỉ nếu chúng cách đều tâm của đường tròn".

1.15. Chứng minh bằng phản chứng định lí sau :

a) Nếu tổng hai số thực lớn hơn 2 thì ít nhất một trong hai số đó lớn hơn 1.

b) Tích của ba số là một số dương thì có ít nhất một trong 3 số là số dương.

Hướng dẫn

a) Cho $a, b \in R$, $a + b > 2$. Giả sử trong hai số a, b không có số nào lớn hơn 1, nghĩa là $a < 1$, $b < 1$.

Thế thì $a + b < 2$, trái với giả thiết $a + b > 2$.

Vậy phải có ít nhất $a > 1$ hoặc $b > 1$.

b) Cho $a, b, c \in R$, $abc > 0$. Giả sử trong các số a, b, c đều nhỏ hơn 0 thì $abc < 0$, trái với giả thiết.

Vậy phải có ít nhất một trong 3 số lớn hơn 0.

1.16. Chứng minh bằng phản chứng định lí : "Tổng bình phương của hai số nguyên chia hết cho 3 thì mỗi số đó chia hết cho 3.

Hướng dẫn

Cho a, b ∈ Z, $a^2 + b^2 \vdots 3$. Giả sử có ít nhất một trong hai số a, b không chia hết cho 3, nghĩa là ta có :

$a = 3k + t_1$ với t_1, k ∈ Z, $0 \le t_1 < 3$

$b = 3h + t_2$ với t_2, h ∈ Z và $0 \le t_2 < 3$ với t_1, t_2 không đồng thời bằng 0

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 9k^2 + 6kt_1 + t_1^2 + 9h^2 + 6ht_2 + t_2^2 \\ &= 3(2k^2 + 2h^2 + 2kt_1 + 2ht_2) + t_1^2 + t_2^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad t_1^2 + t_2^2 = a^2 + b^2 - 3n, \quad \text{với} \quad n = 2k^2 + 2h^2 + 2kt_1 + 2ht_2 \in Z$$

Vế phải của hệ thức cuối chia hết cho 3, trong khi $t_1^2 + t_2^2$ không chia hết cho 3 khi $0 \le t_1 < 3$, $0 \le t_2 < 3$ và t_1, t_2 không đồng thời bằng 0. Điều này mâu thuẫn. (Xét $(t_1, t_2) \in \{(0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0), (2; 1), (2; 2)\}$). Vậy chỉ có thể a, b đồng thời chia hết cho 3.

PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP

Để chứng minh định lí có dạng : ∀n ∈ X : P(n), trong đó P(n) là mệnh đề chứa biến n lấy giá trị thuộc tập hợp con X của tập hợp số tự nhiên N

$X = \{n \in N / n \ge n_0\}$, ta thực hiện như sau :

Bước 1 : *Chứng tỏ rằng $P(n_0)$ là mệnh đề đúng.*

Bước 2 : *Giả sử P(k) đúng với $k \ge n_0$, chứng minh rằng P(k + 1) đúng. Phương pháp chứng minh như vậy gọi là phương pháp quy nạp. Dưới đây là một vài ví dụ cụ thể.*

1.17. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp :

a) Với mọi n ∈ N số $B(n) = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) Với mọi n nguyên dương ta có hệ thức : $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Hướng dẫn

a) Định lí có dạng : "$\forall n \in N : n^3 + 11n \vdots 6$".

Bước 1 : Với n = 0, ta có $0^3 + 11.0 = 0$ chia hết cho 6. Vậy định lí đúng với n = 0.

Bước 2 : Giả sử định lí đúng với n = k, tức là $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 Với n = k + 1 ta có :

$$(k+1)^3 + 11(k+1) = k^3 + 11k + 3k^2 + 3k + 12$$

$$= k^3 + 11k + 3k(k+1) + 12 \qquad (1)$$

Trong hai số k và k + 1 có một số chẵn nên 3k(k + 1) chia hết cho 6, $k^3 + 11k$ chia hết cho 6 (theo giả thiết quy nạp). Vậy vế phải của (1) là số chia hết cho 6. Do đó $(k+1)^3 + 11(k+1)$ chia hết cho 6. Như vậy định lí đúng với n = k + 1.

Kết luận : Với mọi $n \in N$ số $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) *Bước 1 :* Với n = 1 ta có : $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1}$. Hệ thức đúng với n = 1.

Bước 2 : Giả sử hệ thức đúng với n = k > 1, tức là

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

Với n = k + 1 vế trái hệ thức có dạng :

$$\left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)}\right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

Vậy hệ thức đúng với n = k + 1.

Kết luận : Hệ thức đúng với mọi n nguyên dương.

1.18. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp :

a) Với n nguyên dương ta có hệ thức :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1)$$

b) Với mọi n nguyên dương ta có hệ thức :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (2)$$

Hướng dẫn

a) *Bước 1 :* Với n = 1 ta có : $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Hệ thức đúng với n = 1.

Bước 2 : Giả sử hệ thức đúng với n = k > 1, tức là ta có :

$$1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (3)$$

Với n = k + 1 vế trái (1), theo kết quả (3), có dạng :

$$(1 + 2 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = (k+1)\left[\frac{k}{2} + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Nghĩa là hệ thức (1) đúng với n = k + 1

Kết luận : Hệ thức (1) đúng với mọi n nguyên dương.

b) *Bước 1 :* Với n = 1 ta có : $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$, nghĩa là (2) đúng với n = 1.

Bước 2 : Giả sử (2) đúng với n = k, nghĩa là ta có :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (4)$$

Từ (4), vế trái của (2) với n = k + 1 có thể viết

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right] = (k+1)\left[\frac{2k^2 + k + 6k + 6}{6}\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)\left[2(k+1) + 1\right]}{6}$$

Vậy hệ thức (2) đúng với n = k + 1

Kết luận : Hệ thức (2) đúng với mọi n nguyên dương.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.19. Phát biểu mệnh đề đảo của các định lí sau đây và trong mỗi trường hợp xét xem mệnh đề đảo có phải là định lí đảo không.

a) Mỗi tam giác vuông có một góc bằng tổng hai góc còn lại.

b) Hai đường chéo của hình thoi thì vuông góc với nhau.

c) Hình bình hành có các đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

1.20. Dùng thuật ngữ "điều kiện cần" để phát biểu lại mỗi định lí sau :

a) Trong một hình chữ nhật thì hai đường chéo bằng nhau.

b) Trong một tam giác cân thì đường trung tuyến kẻ từ đỉnh cũng là đường cao của tam giác đó.

1.21. Phát biểu lại mỗi định lí sau đây bằng thuật ngữ "điều kiện đủ" :

a) Nếu số tự nhiên n chia hết cho 9 thì tổng các chữ số của n chia hết c 9.

b) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng (phân biệt) cùng vuông góc với n đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

1.22. Phát biểu định lí đảo của định lí sau đây rồi dùng thuật ngữ "điều ki cần và đủ" để gộp cả định lí thuận và định lí đảo.

a) Mỗi tam giác cân có hai đường trung tuyến bằng nhau.

b) Trong tam giác vuông đường trung tuyến tương ứng với cạnh huyền t bằng nửa cạnh huyền.

1.23. Chứng minh bằng phản chứng các định lí :

a) Một tam giác không đều thì có ít nhất một góc nhỏ hơn 60^0.

b) Hai đường thẳng trong mặt phẳng cùng song song với một đườ thẳng thứ ba thì song song với nhau.

c) Ba số dương a, b, c nhỏ hơn 2 thì có ít nhất một trong ba bất đẳ thức sau đây sai :

$$a(2-b) > 1, \quad b(2-c) > 1, \quad c(2-a) > 1$$

1.24. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp :

a) $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ chia hết cho 3 với mọi $n \in N$.

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ với mọi n nguyên dương.

§3. Tập hợp – Các phép toán trên tập hợp

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập hợp *là một khái niệm cơ bản của toán học*

Các tập hợp thường được kí hiệu bằng chữ cái in hoa : A, B, ..., X, Y.

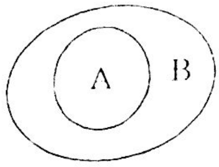
Kí hiệu a ∈ A để chỉ a ***là một phần tử*** *của tập hợp A hay a* ***thuộc*** *. Nếu a không thuộc A ta kí hiệu a ∉ A. Tập hợp không chứa phần nào gọi là* ***tập hợp rỗng,*** *kí hiệu là ∅.*

Một tập hợp được cho ***bằng cách liệt kê*** *các phần tử của nó hoặc* ***n*** ***tính chất đặc trưng chung*** *các phần tử của nó.*

2. Tập hợp con

*Ta bảo A là **tập hợp con** của tập hợp B, kí hiệu là $A \subset B$ nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B.*

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B.$$



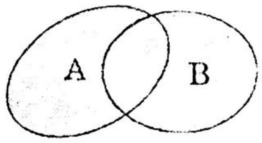
3. Tập hợp bằng nhau

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ và } B \subset A.$$

4. Phép toán hợp

Hợp của hai tập hợp A và B kí hiệu là $A \cup B$

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$



$A \cup B$

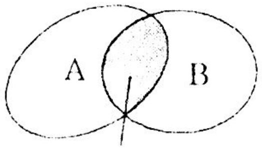
5. Phép giao

Giao của hai tập hợp A và B kí hiệu là $A \cap B$

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ và } x \in B\}$$

Ví dụ : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}; B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}; \quad A \cap B = \{2, 4\}.$$



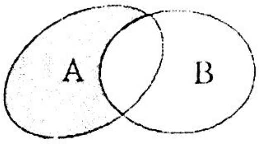
$A \cap B$

6. Phép hiệu

Hiệu của hai tập hợp A và B kí hiệu là $A \backslash B$

$$A \backslash B = \{x / x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

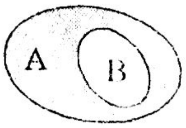
Trên biểu đồ Ven, hiệu $A \backslash B$ là phần gạch sọc.



$A \backslash B$

7. Phần bù

Trường hợp $B \subset A$ thì $A \backslash B$ gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu là C_A^B.



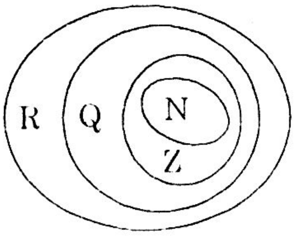
C_A^B

8. Các tập hợp số quan trọng

- *Tập hợp số tự nhiên :* $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- *Tập hợp số nguyên :* $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
- *Tập hợp số hữu tỉ :* $Q = \left\{ \frac{a}{b} / a.b \in Z, b \neq 0 \right\}$
- *Tập hợp số thực : R = tập hợp các số hữu tỉ và các số vô tỉ (tức là các số biểu diễn dưới dạng thập phân vô hạn không tuần hoàn)*

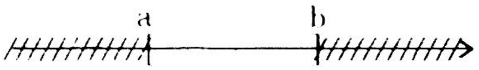
Quan hệ giữa các tập hợp số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ và số thực như sau :

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

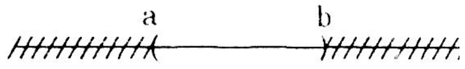


9. Một số tập hợp con của tập hợp số thực R

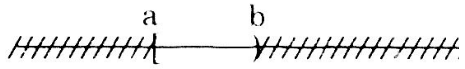
- *Đoạn* : $[a; b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$ *với hình biểu diễn trên trục số.*



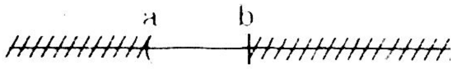
+ *Khoảng* $(a; b) = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$



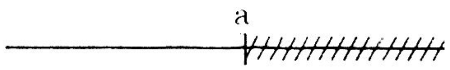
+ *Nửa khoảng* $[a; b) = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$



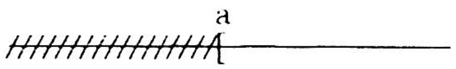
+ *Nửa khoảng* $(a; b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$



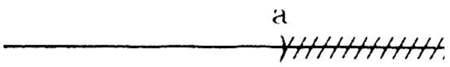
+ *Nửa khoảng* $(-\infty; a] = \{x \in R \,/\, x \leq a\}$



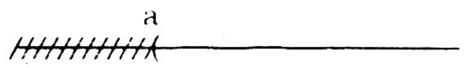
+ *Nửa khoảng* $[a; +\infty) = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$



+ *Khoảng* $(-\infty; a) = \{x \in R \,/\, x < a\}$



+ *Khoảng* $(a; +\infty) = \{x \in R \,/\, x > a\}$



B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.25. Viết tất cả các tập hợp con của tập hợp :

a) $A = \{a, b\}$. **b)** $B = \{a, b, c, d\}$.

Hướng dẫn

a) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, A.

b) $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, c, d$ $\{b, c, d\}$, B.

Ghi chú : Người ta chứng minh được rằng, nếu tập hợp X có n phần t thì số các tập hợp con của X (bao gồm $\varnothing$ và chính tập hợp X) bằng 2 Trong câu a) số tập hợp con của A là 4. Trong câu b) số tập hợp co của B là $2^4 = 16$.

1.26. Tập hợp nào là tập hợp con của tập hợp kia, nếu :

a) $A = \{x \in Z \,/\, x = 15k,\ k \in Z\}$, $B = \{x \in Z \,/\, x = 5k,\ k \in Z\}$.

b) $A = \{x \in Z \,/\, |x| \leq 3\}$, $B = \{x \in R \,/\, x^2 + x - 2 = 0\}$.

Hướng dẫn

a) $x \in A \Leftrightarrow x = 15k,\ k \in Z \Rightarrow x = 5(3k),\ 3k \in Z \Rightarrow x \in B$. Vậy $A \subset B$.

b) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 1$

$B = \{-2, 1\}$ $x \in B \Rightarrow x \in A$

Vậy $B \subset A$.

1.27. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 6, 8\}$, $C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Xác định các tập hợp $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A \setminus B$.

Hướng dẫn

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, ,6, 8\}$

$A \cap B = \{4\}$, $B \cap C = \{4, 6\}$, $A \setminus B = 1, 2, 3, 5\}$.

1.28. Cho các tập hợp $A = \{x \in N \,/\, x < 10\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$

Xác định các tập hợp C_A^B, C_A^C, $C_A^{(B \cup C)}$.

Hướng dẫn

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Rõ ràng $B \subset A$, $C \subset A$

$C_A^B = A \setminus B = \{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $C_A^C = A \setminus C = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$; $C_A^{(B \cup C)} = \{0, 5, 7, 9\}$.

1.29. Cho các tập hợp : $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, $C = \{a, b, e\}$.

Chứng minh : **a)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ (1)

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (2)

Hướng dẫn

a) Ta có : $B \setminus C = \{d\}$, $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cap C = \{a, b\}$

VT (1) : $A \cap (B \setminus C) = \{d\}$

VP (1) : $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = \{d\}$ $\Rightarrow$ VT = VP (1)

b) VT (2) : $A \setminus (B \cap C) = \{a, b, c, d\} \setminus \{b, e\} = \{a, c, d\}$

VP (2) : $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{a, c\} \cup \{c, d\} = \{a, c, d\}$ $\Rightarrow$ VT = VP (2)

1.30. Tìm các tập hợp A và B, biết : $A \setminus B = \{1, 5, 7, 8\}$,

$A \cap B = \{3, 6, 9\}$, $A \cup B = \{x \in N \,/\, 0 < x \leq 10\}$.

Hướng dẫn

$A = A \setminus B \cup (A \cap B) = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = (A \cup B) \setminus A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \setminus \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$= \{2, 4, 10\}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/1626

1.31 Cho A, B, C, D là các tập hợp tùy ý. Chứng minh các đẳng thức :

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (1

b) $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$ (2

Hướng dẫn

a) Để chứng minh đẳng thức tập hợp X = Y, ta chứng minh $a \in X \Rightarrow a \in$ và $a \in Y \Rightarrow a \in X$. Ta chứng minh đẳng thức (1) :

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ và $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B$ hoặc $x \in A$ và $x \in C$

tức là $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Đảo lại $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B$ hoặc $x \in A$ và $x \in$

$\Rightarrow x \in A$ và $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

Vậy đẳng thức (1) được chứng minh.

b) Theo kết quả câu a) ta có :

VT (2) : $(A \cup B) \cap (C \cup D) = [(A \cup B) \cap C] \cup [(A \cup B) \cap D]$

Chú ý rằng giao của hai tập hợp có tính chất giao hoán, nghĩa là

$$X \cap Y = Y \cap X$$

Lại áp dụng kết quả câu a) đối với các tập hợp trong các [ ] ta có :

$(A \cup B) \cap C = C \cap (A \cup B) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cup B) \cap D = D \cap (A \cup B) = (A \cap D) \cup (B \cap D)$

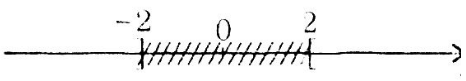
Từ đó suy ra VT = VP (2).

1.32. Biểu diễn mỗi tập hợp cho dưới đây thành hợp của các nửa khoảng v biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A = \{x \in R \,/\, |x| \geq 1\}$. **b)** $B = \{x \in R \,/\, |x| < 5\} \setminus (-2; 2)$.

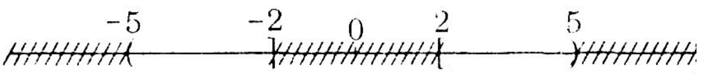
Hướng dẫn

a) $A = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Tập hợp A được biểu diễn bằng phần không b gạch sọc trên trục số.



b) $B = (-5; 5) \setminus (-2; 2) = (-5; -2] \cup [2; 5)$.

Biểu diễn trên trục số (hình bên).



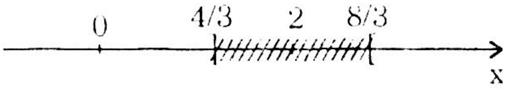
1.33. Cho tập hợp $A = \left\{x \in R \,/\, \dfrac{2}{|x-2|} > 3\right\}$. Xác định tập hợp $R \setminus A$ và biểu diễn nó trên trục số.

Hướng dẫn

$$\frac{2}{|x-2|} > 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ |x-2| < \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -\dfrac{2}{3} < x - 2 < \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ \dfrac{4}{3} < x < \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{4}{3};\ 2\right) \cup \left(2;\ \frac{8}{3}\right)$$

$$R \setminus A = \left(-\infty;\ \frac{4}{3}\right] \cup \{1\} \cup \left[\frac{8}{3};\ +\infty\right)$$



C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.34. Cho các tập hợp $A = \{x \in Z \,/\, -4 \le x < 3\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Xác định các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

1.35. Cho các tập hợp $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Xác định các tập hợp C_E^A, C_E^B, $C_E^{(A \cup B)}$, $C_E^A \cup C_E^B$.

1.36. Cho các tập hợp $X = \{x \in N \,/\, 0 < x < 10\}$, A và B là các tập hợp con của X sao cho :

$$A \cap B = \{4, 6, 9\} \qquad (1)$$

$$A \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\} \qquad (2)$$

$$B \cup \{4, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad (3)$$

Hãy xác định các tập hợp A và B.

1.37. Hãy biểu diễn mỗi tập hợp dưới đây thành hợp của hai nửa khoảng hay hai khoảng và biểu diễn chúng trên trục số.

a) $A = \{x \in R \,/\, |x| > 3\}$. **b)** $B = (-5; 6) \setminus [1; 3]$.

1.38. Cho các tập hợp $A = \{x \in R \,/\, |x - 1| < 2\}$,

$B = \{x \in R \,/\, |x + 1| < 3\}$.

Hãy xác định các tập hợp $A \cup B$ và $A \cup B$ và biểu diễn trên trục số.

1.39. Chứng minh rằng : $B \cup (A \setminus B) = A \Leftrightarrow A \cap B = B$.

§4. Sai số - Cách viết chuẩn số gần đúng

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Sai số tuyệt đối, sai số tương đối

Giả sử a là số gần đúng của số $\overline{a}$

+ ***Sai số tuyệt đối** của số gần đúng a là :* $\Delta_a = |a - \overline{a}|$

+ ***Sai số tương đối** của số gần đúng a là :* $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{|a - \overline{a}|}{|a|}$.

2. Độ chính xác của số gần đúng

Cho a là số gần đúng của số $\overline{a}$. Nói chung ta không biết chính xác $\overline{a}$ nên không biết chính xác Δ_a. Nhưng có thể đánh giá

$$\Delta_a = |a - \overline{a}| \le d \quad \text{hay} \quad a - d \le \overline{a} \le a + d$$

*Ta bảo d là **độ chính xác** của số gần đúng a và viết :* $\overline{a} = a \pm d$.

3. Các phép toán về số gần đúng

Cho a, b là các số gần đúng với sai số tuyệt đối theo thứ tự là Δ_a, Δ_b, sai số tương đối theo thứ tự là δ_a, δ_b thì :

+ ***Sai số tuyệt đối của tổng, hiệu hai số gần đúng** a, b không vượt quá* $\Delta_a + \Delta_b$:

$$\Delta_{a+b} \le \Delta_a + \Delta_b , \qquad \Delta_{a-b} \le \Delta_a + \Delta_b.$$

+ ***Sai số tương đối của tích, của thương** hai số a, b, không vượt quá* $\delta_a + \delta_b$:

$$\delta_{a.b} \le \delta_a + \delta_b , \qquad \delta_{\frac{a}{b}} \le \delta_a + \delta_b.$$

4. Chữ số chắc (đáng tin) và cách viết chuẩn số gần đúng

*Cho a là số gần đúng của số $\overline{a}$. Một chữ số của a là **chữ số chắc** (đáng tin) nếu sai số tuyệt đối của a không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số đó. **Cách viết chuẩn** của số gần đúng a là cách viết trong đó mọi chữ số đều là chữ số chắc.*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

1.40. Dùng phân số $\dfrac{33}{19}$ để làm số gần đúng cho $\sqrt{3}$. Hãy đánh giá sai số tuyệt đối mắc phải là bao nhiêu ?

Hướng dẫn

Sử dụng máy tính bỏ túi ta thấy :

$\sqrt{3} = 1,732050808...$

$\dfrac{33}{19} = 1,736842105...$

$\left|\dfrac{33}{19} - \sqrt{3}\right| = |1,7368... - 1,73205...| < 1,737 - 1,732 = 0,005$

Vậy khi dùng $\dfrac{33}{19}$ làm số gần đúng của $\sqrt{3}$ thì sai số tuyệt đối mắc phải không vượt quá 5%.

1.41. Một hình hộp chữ nhật có các kích thước là :

$x = 3m \pm 1cm$; $y = 5m \pm 2cm$ và $z = 4m \pm 2cm$

Hãy tính thể tích và sai số tuyệt đối, sai số tương đối và số chữ số chắc của kết quả.

Hướng dẫn

Thể tích : $V = x.y.z = 3.4.5 = 60m^3$

Sai tương đối của các cạnh theo thứ tự là :

$\delta_x = \dfrac{1}{300}$; $\delta_y = \dfrac{2}{500}$; $\delta_z = \dfrac{2}{400}$.

Sai số tương đối của thể tích :

$$\delta_V \le \delta_x + \delta_y + \delta_z = \frac{1}{300} + \frac{2}{500} + \frac{2}{400} = \frac{37}{3000} \approx 1,2\%$$

Sai số tuyệt đối mắc phải : $\Delta = \dfrac{37}{3000} . 60.000 = 740dm^3 < 1m^3$

Ta có thể viết thể tích của hình hộp V = 60.000 ± 740 lít

hay $V = 60 + 0,74$ với 2 chữ số chắc.

1.42. Các phép tính cho biết thể tích của một vật thể là $V = 180,57cm^3$ và sai số tuyệt đối không quá $0,05cm^3$. Tìm sai số tương đối và cho số chữ số chắc của kết quả. Hãy viết kết quả dưới dạng chuẩn.

Hướng dẫn

– Sai số tương đối $\delta_V = \dfrac{0,05}{180,57} = \dfrac{5}{18057} < 0,0003 = 3.10^{-4}$

– Vì $0,05 > 0,01$ nên chữ số 7 là không đáng tin. Các chữ số chắc là 1, 8, 0, 5. Cách viết chuẩn : $V = 180,60 \pm 0,05cm^3$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.43. Dùng $\frac{38}{17}$ làm số gần đúng của $\sqrt{5}$. Đánh giá sai số tuyệt đối của số gần đúng đó.

1.44. Đánh giá sai số tuyệt đối của số gần đúng của π là 3,1416. Hỏi số chữ số chắc khi viết $\pi = 3,1416$.

1.45. Một tam giác có các cạnh đo được là $a = 6,3 \pm 0,1$cm, $b = 10 \pm 0,2$cm, $c = 15 \pm 0,3$cm. Hãy tính chu vi của tam giác và sai số tuyệt đối mắc phải.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1.46. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây và xét tính đúng sai của nó.

a) $\exists n \in N : n^2 + 1$ chia hết cho 3.

b) $\forall n \in N : n^2 + 1$ không chia hết cho 4.

1.47. Chứng minh bằng phản chứng định lí :

a) Mỗi tam giác có không quá một góc tù.

b) Tổng hai số là một số âm thì ít nhất một trong hai số là số âm.

1.48. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", phát biểu lại các định lí sau đây :

a) Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

b) Bình phương số tự nhiên n chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.

1.49. Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" để phát biểu định lí : Trong tam giác vuông, đường trung tuyến tương ứng với cạnh huyền thì bằng nửa cạnh huyền.

1.50. Cho $A = \{2, 4, 6, 8\}$ hãy liệt kê các tập con của A có 2 phần tử.

1.51. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 4, 6\}$, $C = \{2, 3, 4, 5, 7\}$.

Xác định các tập hợp C_A^B, $C_A^{(B \cup C)}$, $C_A^{(B \cap C)}$.

1.52. Cho $A = (-\infty; 1]$, $B = \left(\frac{m}{2}; +\infty\right)$, $m \in R$. Xác định m để :

a) $A \cap B = \varnothing$.

b) $A \setminus B \neq A$.

1.53. Cho $A = \{x \in R \,/\, x - 1 > 3\}$, $B = \left\{x \in R \,/\, \frac{1}{|x + 2|} > 2\right\}$

Xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

hương II

HÀM SỐ BẬC NHẤT - HÀM SỐ BẬC HAI

§1. Khái niệm hàm số

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho $D \subset R$, $D \neq \varnothing$. Ta bảo hàm số f xác định trên D là quy tắc cho tương ứng mỗi giá trị $x \in D$ một và chỉ một giá trị $y \in R$. Kí hiệu :

$$f : D \to R$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

*x được gọi là **biến số** (hay **đối số**). Tập hợp D được gọi là **tập xác định** (hay **miền xác định**), $y_0 = f(x_0)$ được gọi là giá trị của hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.*

2. Đồ thị của hàm số

Với mỗi $x \in D$ xác định giá trị f(x). Cặp số (x, f(x)) được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ bằng một điểm. Đồ thị của hàm số

$$f : D \to R$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

là tập hợp (C) các điểm (x; f(x)) $\forall x \in D$ trên mặt phẳng tọa độ.

3. Sự biến thiên

*Hàm số $y = f(x)$ là **đồng biến** trên khoảng (a; b) nếu với mọi $x_1, x_2 \in (a; b)$*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \text{ hay } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

*và **nghịch biến** trên (a; b) nếu*

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2) \text{ hay } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

4. Tính chẵn, lẻ của hàm số

Hàm số $f : D \to R$

$$x \mapsto y = f(x)$$

*được gọi là **hàm số chẵn** nếu* $x \in D \quad \Rightarrow \quad -x \in D$ *và* $f(-x) = f(x)$

*và được gọi là **hàm số lẻ** nếu* $x \in D \quad \Rightarrow \quad -x \in D$ *và* $f(-x) = -f(x)$

Đồ thị của hàm số chẵn có ***trục đối xứng*** *là trục tung và đồ thị cú hàm số lẻ có* ***tâm đối xứng*** *là gốc hệ trục tọa độ.*

Nhiều hàm số không phải là hàm số chẵn, cũng không phải là hàm s lẻ.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.1. Tìm miền xác định của các hàm số :

a) $y = \sqrt{2x+3} - \sqrt{2-x}$. **b)** $y = \dfrac{2x+1}{2x^2-5x+3}$.

Hướng dẫn

a) Biểu thức $\sqrt{2x-3}$ xác định với các giá trị của x sao cho $2x - 3 \geq 0$, tứ là với $x \geq \dfrac{3}{2}$. Tương tự $\sqrt{2-x}$ xác định với x, sao cho $2 - x \geq 0$, tức l với $x \leq 2$. Miền xác định của hàm số là các giá trị của x sao cho $x \geq$ đồng thời $x \leq 2$, tức là $\dfrac{3}{2} \leq x \leq 2$. Có thể viết miền xác định là :

$$D = \left[\frac{3}{2}; 2\right].$$

b) Miền xác định là : $D = \{x \in R \,/\, 2x^2 - 5x + 3 \neq 0\} = R \setminus \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Ghi chú : Khi hàm số được cho bằng công thức mà không có gì n thêm thì miền xác định của hàm số là tập hợp các số thực sao cho cá phép tính của công thức có nghĩa.

2.2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$.

a) Tìm các giá trị $f(0)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Hướng dẫn

a) $f(0) = \dfrac{0^2+2.0+3}{0^2+2} = \dfrac{3}{2}$; $f(-2) = \dfrac{(-2)^2+2(-2)+3}{(-2)^2+2} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$;

$$f(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+3}{(\sqrt{2})^2+2} = \frac{5+2\sqrt{2}}{4}.$$

b) Do $x^2 + 2 > 0,\ \forall x \in R$ nên hàm số có tập xác định là R. Ta có :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{(2x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 2} = 2 - \frac{(x-1)^2}{x^2 + 2} \le 2\quad \forall x \in R$$

Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 2 khi x = 1.

Ta lại có :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2) + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4)}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} + \frac{(x+2)^2}{2(x^2 + 2)} \ge \frac{1}{2}$$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi x = –2.

2.3. Xác định công thức của hàm số f(x), nếu

a) $f(a + 1) = 2a - 1\quad \forall a \in R.$ **b)** $f(a - 1) = a^2 - 3a + 2\quad \forall a \in R.$

Hướng dẫn

a) Đặt $t = a + 1$ ta có : $a = t - 1$

$f(a + 1) = f(t) = 2(t - 1) - 1 = 2t - 3$

Hàm số có công thức là $y = f(x) = 2x - 3$.

b) Đặt $t = a - 1 \Rightarrow a = t + 1$

$f(a - 1) = f(t) = (t + 1)^2 - 3(t + 1) + 2 = t^2 - t$

Công thức của hàm số là $y = f(x) = x^2 - x$.

2.4. Cho các hàm số $f(x) = 2x^2 + 2$ và $g(x) = 3x + 1$

và các điểm trên mặt phẳng tọa độ : A(0; 1), B(–1; 4), C(2; 1).

a) Trong các điểm đã cho, điểm nào thuộc đồ thị hàm số f(x), điểm nào không thuộc đồ thị hàm số g(x).

b) Tìm tọa độ giao điểm của các đồ thị hai hàm số.

Hướng dẫn

a) Xét điểm A(0; 1) ta thấy : $f(0) = 2.0^2 + 2 = 2 \neq 1$

Vậy A(0; 1) không thuộc đồ thị của hàm số f(x).

Xét điểm B(–1; 4) ta thấy : $f(-1) = 2(-1)^2 + 2 = 4$

Vậy B(–1; 4) thuộc đồ thị hàm số f(x).

Làm tương tự ta thấy C(2; 1) không thuộc đồ thị hàm số f(x).

Các điểm B(–1; 4), C(2; 1) không thuộc đồ thị hàm số g(x).

b) Nếu điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm chung (giao điểm) của các hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ thì ta phải có :

$$\begin{cases} y_0 = f(x_0) \\ y_0 = g(x_0) \end{cases} \Rightarrow \quad f(x_0) = g(x_0)$$

Nói khác đi x_0 là một nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ (mà ta gọi là phương trình hoành độ giao điểm các đồ thị của $f(x)$ và $g(x)$).

Ta có : $2x^2 + 2 = 3x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}$.

Vậy các giao điểm của hai đồ thị có các hoành độ là $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

Tọa độ các giao điểm là : $A(1; 4)$, $B\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Ghi chú : Quy tắc tìm các giao điểm các đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ gồm các bước :

1. Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ (1)
2. Với mỗi nghiệm x_0 của phương trình (1) ta thay vào một trong hai công thức $f(x)$ hoặc $g(x)$ để tìm tung độ của giao điểm tương ứng.

Số giao điểm của hai đồ thị là số nghiệm phân biệt của phương trình $f(x) = g(x)$.

2.5. Khảo sát sự biến thiên của hàm số trên các khoảng ghi kèm theo.

a) $y = \dfrac{2}{3 + x}$ trên $(-\infty; -3)$. **b)** $y = |-2x + 3|$ trên $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Hướng dẫn

a) Lấy $x_1, x_2 \in (-\infty; -3)$ với $x_1 < x_2$. Xét tỉ số :

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{2}{3 + x_1} - \dfrac{2}{3 + x_2}}{x_1 - x_2} = -\frac{2}{(3 + x_1)(3 + x_2)} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

b) Ta có : $y = |-2x + 3| = |2x - 3| = \begin{cases} -2x + 3 \text{ nếu } x \le \dfrac{3}{2} \\ 2x - 3 \text{ nếu } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Lấy $x_1, x_2 \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ với $x_1 < x_2$ ta có :

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(2x_1-3)-(2x_2-3)}{x_1-x_2}=2>0$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

.6. Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số cho dưới đây :

a) $y=\sqrt{1-x^2}$. **b)** $y=\dfrac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}$. **c)** $y=2x^2+3x-5$.

Hướng dẫn

a) Miền xác định của hàm số $D=\{x\in R\ /\ |x|\le 1\}=[-1;1]$

Rõ ràng $x\in D\Rightarrow -x\in D$, hơn nữa

$$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Miền xác định là $D=R$, suy ra $x\in D$ thì $-x\in D$

$$f(-x)=\frac{|1-x|-|1-(-x)|}{|1-x|+|1-(-x)|}=\frac{-|1+x|+|1-x|}{|1+x|+|1-x|}=-f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Miền xác định là $D=R$ nên $x\in D$ ta có $-x\in D$.

Mặt khác : $f(-x)=2(-x)^2+3(-x)-5=2x^2-3x-5\neq f(x)$

$f(-x)\neq -f(x)=-2x^2-3x-5$

Vậy hàm số đã cho không chẵn cũng không lẻ.

. BÀI TẬP TỰ GIẢI

.7. Tìm miền xác định của hàm số

a) $y=\sqrt{2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. **b)** $y=\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$.

c) $y=\sqrt{(x-3)(2x+1)}$. **d)** $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

.8. Cho hàm số $y=f(x)=x^2+\sqrt{x-3}$.

a) Tìm các giá trị f(3), f(4).

b) Trong các điểm trong mặt phẳng tọa độ sau đây, điểm nào thuộc đồ thị của hàm số f(x) : A(7; 51), B(4; 12), C(5; $25+\sqrt{2}$).

2.9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số

a) $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 2}$. **b)** $y = \dfrac{4x + 3}{x^2 + 1}$.

2.10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

a) $y = x^2 - 3x + 1$. **b)** $y = 3 - \sqrt{(x - 3)(5 - x)}$.

c) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9}$. **d)** $y = 2|x + 3| - 4$.

2.11. Xét tính chẵn, lẻ của mỗi hàm số cho dưới đây

a) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{|1 + x| + |1 - x|}$. **b)** $y = \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x^2}$.

c) $y = \sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{(1 - x)^2}$. **d)** $y = 2x - 1$.

2.12. Tìm công thức cho hàm số trong mỗi trường hợp sau :

a) Biết $f(a + 2) = a^2 - 3a + 2 \quad \forall a \in R$.

b) Biết $f\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = 2a^2 + a + \dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a^2} + 2 \quad \forall a \neq 0$.

2.13. Cho hàm số biến số x : $y = \dfrac{mx + 2}{x + m - 1}$ (m là tham số)

Với giá trị nào của m :

a) Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

b) Đồ thị cắt trục hoành tại điểm có hoành độ $x = 4$.

c) Đồ thị hàm số không cắt trục tung.

2.14. Cho hai hàm số với cùng biến số x có miền xác định là A : $y = f(x)$ $y = g(x)$. Hàm số $h(x)$ được gọi là tổng của $f(x)$ và $g(x)$, kí hiệu $h(x) = f(x) + g(x)$ nếu với mọi $x_0 \in A$ ta có $h(x_0) = f(x_0) + g(x_0)$ và k(x tích của $f(x)$ và $g(x)$, kí hiệu $k(x) = f(x).g(x)$ nếu với mọi $x_0 \in A$ ta $k(x_0) = f(x_0).g(x_0)$. Chứng minh rằng :

a) Tổng của hai hàm số chẵn là một hàm số chẵn.

b) Tổng của hai hàm số lẻ là hàm số lẻ.

c) Tích của hai hàm số chẵn là hàm số chẵn, tích của hai hàm số lẻ một hàm số chẵn.

d) Tích của một hàm số chẵn với một hàm số lẻ là một hàm số lẻ.

.15. Chứng minh rằng một hàm số f(x) có miền xác định D có tính chất $x \in D$ thì $-x \in D$, bao giờ cũng biểu diễn được thành tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

.16. Cho hàm số biến số x : $y = mx^2 - (m - 1)x - 2m + 1$, (m là tham số). Hãy tìm trên mặt phẳng tọa độ các điểm sao cho nó luôn luôn thuộc đồ thị của hàm số dù m lấy bất kì giá trị nào.

.17. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$. Tìm trên đồ thị của hàm số đã cho các điểm có tọa độ là các số nguyên.

.18. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x}$. Tìm trên đồ thị của hàm số các điểm cách đều hai trục tọa độ.

.19. Cho các hàm số $y = 2x^2 - 3x + 2$ và $y = 2x - 1$. Tìm tọa độ các giao điểm của hai đồ thị.

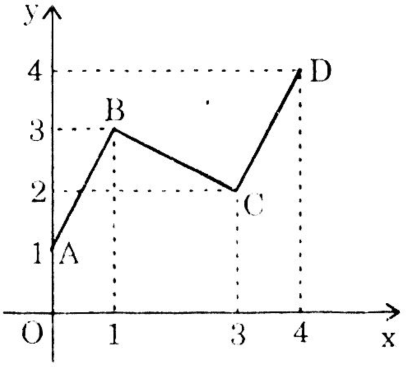
.20. Xác định sự biến thiên của hàm số trên khoảng đã cho tương ứng :

a) $y = -2x^2 + 4x + 3$ trên $(-\infty; 1)$.

b) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 2}$ trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

.21. Đồ thị của hàm số y = f(x) là đường gấp khúc ABCD như hình bên.

Hãy cho biết sự biến thiên của hàm số f(x) trên các khoảng (0; 1), (1; 3), (3; 4).



§2. Hàm số bậc nhất và một vài hàm số liên quan

. KIẾN THỨC CƠ BẢN

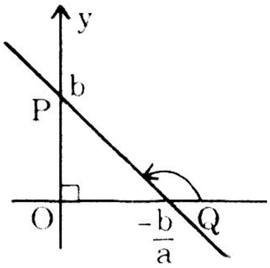
1. Khảo sát hàm số bậc nhất

Hàm số biến số x là hàm số bậc nhất nếu có dạng $y = ax + b$ với a, b là các hằng số với $a \neq 0$. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ có :

+ ***Tập xác định :*** *$D = R$*

+ ***Sự biến thiên :*** *Đồng biến trên R, nếu $a > 0$, nghịch biến trên R, nếu $a < 0$.*

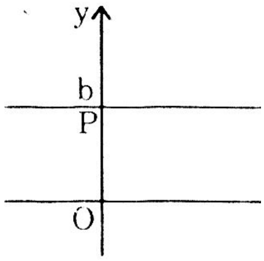
+ ***Đồ thị*** *là một đường thẳng đi qua gốc O và điểm A(1; a), nếu a ≠ 0, b = 0, đi qua các điểm P(0; b) và* $Q\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ *nếu a ≠ 0, b ≠ 0. Ta gọi đồ thị hàm số y = ax + b là **đường thẳng** y = ax + b và gọi a là **hệ số góc** của đường thẳng đó.*



2. Hàm số hằng y = b

Hàm số y = ax + b trong trường hợp a = 0 trở thành hàm số y = b gọi là hàm số hằng.

Đồ thị của hàm số hằng y = b là đường thẳng song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm P(0; b).

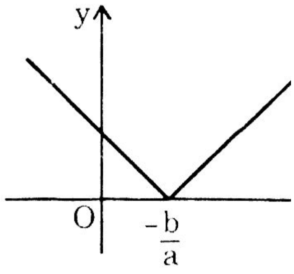


3. Hàm số y = |ax + b| với hằng số a > 0

+ *Tập xác định : D = R*

+ *Bảng biến thiên :*

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



+ *Đồ thị : Với a > 0 trên khoảng* $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$ *đồ thị hàm y = |ax +*

trùng với đồ thị hàm số y = −ax − b, trên khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$ *đồ trùng với đồ thị hàm số y = ax + b.*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.22. Trên mặt phẳng tọa độ cho 3 điểm A(−1; 1), B(2; 2), C(3; m), trong m là một số cho trước.

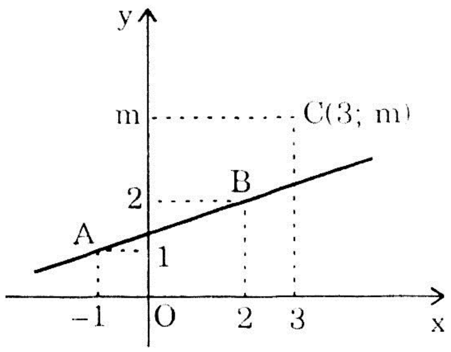
a) Xác định hàm số có đồ thị là đường thẳng AB.

b) Với giá trị nào của m thì 3 điểm A, B, C thẳng hàng ?

Hướng dẫn

a) Hàm số có đồ thị là đường thẳng AB là một hàm số bậc nhất có dạn

y = ax + b trong đó a, b là các hằng số cần được xác định.



Do A(−1; 1) thuộc đồ thị nên ta có :

$$1 = a(-1) + b \quad \Rightarrow \quad b = 1 + a \qquad (1)$$

Thay tọa độ của B vào biểu thức ta được :

$$2 = a.2 + b \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được : $a = \dfrac{1}{3}$, $b = \dfrac{4}{3}$.

Vậy hàm số có đồ thị là đường thẳng AB là $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}$.

b) A, B, C thẳng hàng có nghĩa là C(1; m) thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{4}{3}$ tức là tọa độ của C nghiệm đúng công thức của hàm số :

$$m = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}.$$

2.23. Cho hàm số biến số x : $y = \dfrac{m+2}{2m-1}x + m + 1$ (m là tham số)

a) Với giá trị nào của m thì hàm số là hàm số bậc nhất.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên R.

Hướng dẫn

a) Hàm số là bậc nhất khi hệ số của x là $\dfrac{m+2}{2m-1}$ xác định và khác 0.

Điều này xảy ra nếu $2m - 1 \neq 0$ và $m + 2 \neq 0$, tức là với $m \neq \dfrac{1}{2}$ và $m \neq -2$.

b) Với $m \neq \dfrac{1}{2}$ và $m \neq -2$ thì hàm số là hàm số bậc nhất đồng biến trên R nếu $\dfrac{m+2}{2m-1} > 0$. Điều này xảy ra với những giá trị $m < -2$ hoặc $m > \dfrac{1}{2}$.

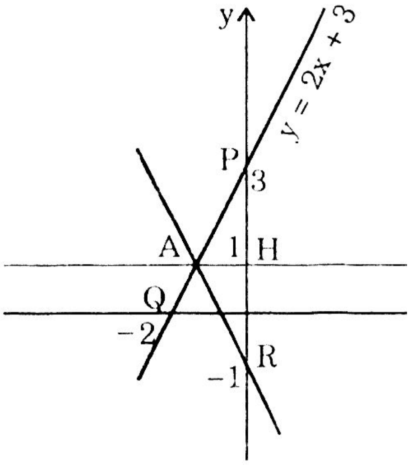
2.24. Cho hàm số $y = 2x + 3$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số trên.

b) Tìm hàm số có đồ thị là đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = 2x + 3$ qua đường thẳng $y = 1$.

Hướng dẫn

a) Đồ thị hàm số : $y = 2x + 3$ là đường thẳng đi qua các điểm P(0; 3) và điểm $Q\left(-\dfrac{3}{2}; 0\right)$.



b) Đường thẳng $y = 1$, cắt trục tung tại điểm $H(0; 1)$ và cắt đường thẳng $y = 2x + 3$ tại điểm A có tung độ $y_0 = 1$ và có hoành độ x_0 mà $1 = 2x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Đường thẳng đối xứng với đường thẳng $y = 2x + 3$ qua đường thẳng $y = 1$ là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 1)$ và điểm R trên trục tung sao cho $PH = RH$. Tọa độ của R là $R(0; -1)$.

Đường thẳng AR có phương trình tổng quát $y = ax + b$. Thay x, y b tọa độ của A và R ta được $1 = a(-1) + b$

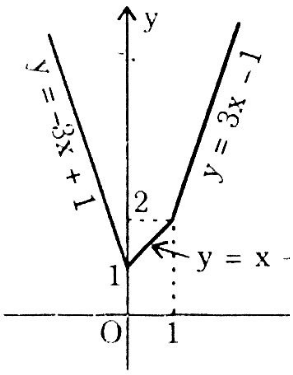
$$-1 = a.0 + b \quad \Leftrightarrow \quad a = -2,\ b = -1$$

Vậy hàm số có đồ thị là đường thẳng đối xứng của $y = 2x + 3$ q đường $y = 1$ là : $y = -2x - 1$.

2.25. Vẽ đồ thị của hàm số :

a) $y = |x - 1| + |2x|$. **b)** $y = [2x]$.

Hướng dẫn



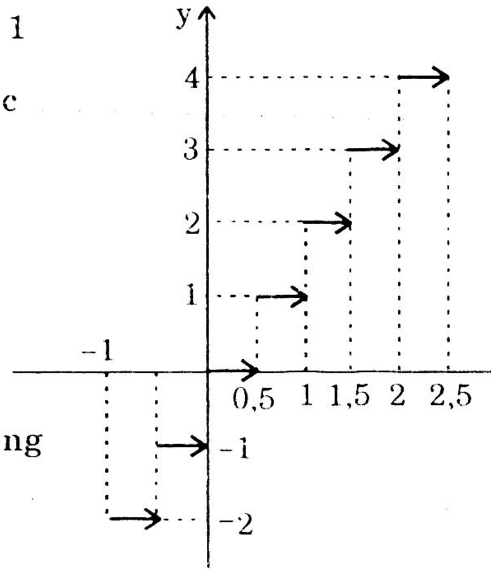
a) Để xác định công thức của hàm số không chứa dấu giá trị tuyệt đối ta lập bảng sau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\lvert x-1\rvert$		$-x+1$		$-x+1$	0	$x-1$	
$\lvert 2x\rvert$		$-2x$	0	$2x$		$2x$	
y		$-3x+1$		$x+1$		$3x-1$	

Qua bảng ta có thể viết lại công thức xác định hàm số như sau

$$y = |x-1| + |2x| = \begin{cases} -3x+1 & \text{với} \quad x \le 0 \\ x+1 & \text{với} \quad 0 < x \le 1 \\ 3x-1 & \text{với} \quad x > 1 \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số là đường gấp khúc như hình trên.



b) Với mỗi $k \in \mathbb{Z}$, ta có :

$[2x] = k$ nếu $k \le 2x < k + 1$ hay

$y = [2x] = k$ nếu $\dfrac{k}{2} \le x < \dfrac{k+1}{2}$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Đồ thị hàm số $y = [2x]$ là các đoạn thẳng nửa hở (đầu có mũi tên) như hình bên.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.26. Vẽ đồ thị các hàm số

a) $y = \frac{3}{2}x - 4$. **b)** $y = -2x + 3$.

2.27. Cho các hàm số : $y = f(x) = 2x - 4$ và $y = g(x) = -x + 3$.

a) Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ đồ thị của hai hàm số và xác định tọa độ giao điểm của các đồ thị.

b) Xác định giá trị của k để các đường thẳng :

$y = f(x)$, $y = g(x)$ và $y = 3x + k + 1$ đồng quy.

2.28. Trên mặt phẳng tọa độ cho các điểm A(1; 2), B(2; –3), C(3; k + 1) (k là một hằng số nào đó).

a) Xác định hàm số có đồ thị là đường thẳng AB.

b) Tìm giá trị của k để các điểm A, B, C thẳng hàng.

2.29. Cho hàm số $y = \frac{2k - 1}{k + 2}x + 3 - k$ (k là tham số).

a) Với giá trị nào của k hàm số đã cho là hàm hằng.

b) Với giá trị nào của k hàm số đã cho đồng biến.

2.30. Cho hàm số $y = \frac{2m + 1}{m - 1}x + 2 \left(m \neq 1, m \neq -\frac{1}{2}\right)$

Tìm trên mặt phẳng tọa độ các điểm mà đồ thị hàm số luôn luôn đi qua dù m lấy bất cứ giá trị nào khác 1 và khác $-\frac{1}{2}$.

2.31. Vẽ đồ thị hàm số

a) $y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{với } x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & \text{với } x > 2. \end{cases}$ **b)** $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{với } x \leq 1 \\ \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \text{với } x > 1. \end{cases}$

2.32.

a) Vẽ đồ thị của hàm số : $y = f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{với } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{với } x > 1. \end{cases}$

b) Tìm điều kiện cho m để đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số f(x) tại hai điểm phân biệt.

2.33. Vẽ đồ thị của hàm số :

a) $y = |-x + 1|$ **b)** $y = |2x - 3| - 2$.

2.34.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = |2x - 1| + |-x + 2|$.

b) Dùng đồ thị của hàm số trên, biện luận theo tham số m số nghiệm củ phương trình : $|2x - 1| + |-x + 2| - m + 1 = 0$.

2.35. Vẽ đồ thị hàm số

a) $y = \{x\} = x - [x]$. **b)** $y = x + [x]$.

§3. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập xác định : $D = R$

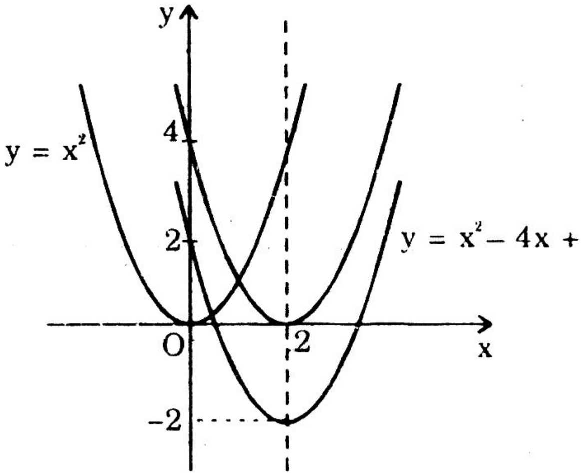
2. Sự biến thiên

Với $a > 0$, hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trong khoản $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ *đồng biến trên khoảng* $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

Với $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$, *nghịch biế trên khoảng* $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

3. Đồ thị

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ là một parabol có đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, *trong đó $\Delta = b^2 - 4ac$, có trục đối xứng là đường thẳng song song với trục tung là* $x = -\dfrac{b}{2a}$.



Đồ thị của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có thể nhận được từ đồ thị hàm $y = ax^2$ qua hai phép tịnh tiến :

1) Tịnh tiến sang phải $-\frac{b}{2a}$ *đơn vị, nếu* $-\frac{b}{2a} > 0$ *hay sang trái* $-\frac{b}{2a}$ *đơn vị, nếu* $\frac{b}{2a} < 0$.

2) Tịnh tiến hình ở bước 1 lên trên $-\frac{\Delta}{4a} > 0$ *hoặc xuống dưới* $\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|$ *đơn vị nếu* $-\frac{\Delta}{4a} < 0$.

***Ví dụ** : Đồ thị hàm số* $y = x^2 - 4x + 2$ *(hình trên).*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

2.36. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

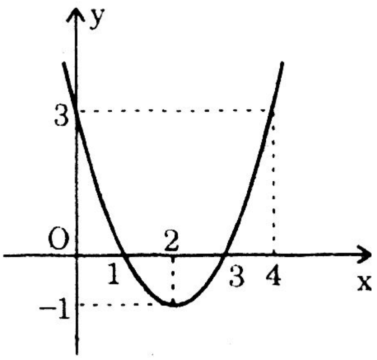
a) $y = x^2 - 4x + 3$. **b)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định : D = R.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



h.a

Đồ thị có :

– Trục đối xứng : $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$

– Đỉnh : $S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \Leftrightarrow S(2; -1)$.

– Giao điểm của parabol với trục tung : K(0; 3).

– Giao điểm của parabol với trục hoành có hoành độ là nghiệm củ phương trình

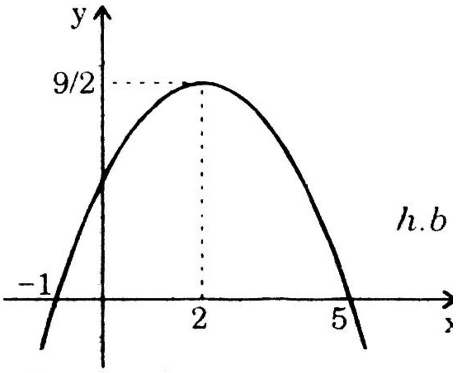
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

Đồ thị là hình h.a.

b) Tập xác định : D = R.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		$\nearrow$	4	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$



h.b

Đồ thị có :

- Trục đối xứng : $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-1} = 2$.

- Đỉnh : $S\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) \Leftrightarrow S\left(2; \dfrac{9}{2}\right)$.

- Giao điểm của đồ thị với trục tung : $K\left(0; \dfrac{5}{2}\right)$.

- Giao điểm của parabol với trục hoành tại các điểm có hoành độ :

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 5.$$

Đồ thị hình h.b.

2.37. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết đồ thị của hàm số đi qua các điểm A(1; –6), B(–1; 0), C(3; –4).

Hướng dẫn

$A(1; -6) \in P \Rightarrow -6 = a + b + c$ (1)

$B(-1; 0) \in P \Rightarrow 0 = a - b + c$ (2)

$C(3; -4) \in P \Rightarrow -4 = 9a + 3b + c$ (3)

$\Rightarrow a = 1,\quad b = -3,\quad c = -4.$

Hàm số cần tìm là : $y = x^2 - 3x - 4$.

2.38. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng đồ thị của nó là parabol có đỉnh $I\left(\dfrac{7}{4}; -\dfrac{25}{8}\right)$ và chứa điểm A(1; –2).

Hướng dẫn

Ta biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

Từ giả thiết ta có : $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{7}{4}$ (1)

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{25}{8} \qquad (2)$$

Do $A(1; -2) \in P \Rightarrow -2 = a + b + c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta tìm được $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$.

Hàm số cần tìm : $y = 2x^2 - 7x + 3$.

2.39. Cho parabol (P) : $y = -2x^2$.

a) Tịnh tiến (P) song song với trục hoành về bên trái 2 đơn vị ta được parabol (P_1). Hãy xác định phương trình của (P_1).

b) Tịnh tiến (P_1) song song với trục tung lên trên 3 đơn vị ta được parabol (P_2). Hãy xác định phương trình của (P_2).

Hướng dẫn

a) Phương trình của (P_1) : $y = -2(x + 2)^2$.

b) Phương trình của (P_2) : $y = -2(x + 2)^2 + 3$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

2.40. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số.

a) $y = 2x^2 - 3x + 1$. **b)** $y = x^2 + 3x - 4$.

c) $y = -x^2 + 4x - 4$. **d)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$.

2.41. Xác định tọa độ của đỉnh và các giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của parabol.

a) $y = x^2 - 5x + 6$. **b)** $y = 2x^2 - x - 6$.

c) $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$. **d)** $y = x^2 - x + 1$.

2.42. Trong mỗi trường hợp sau đây hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và dựa trên đồ thị hãy xác định tập giá trị của x để $f(x) \geq 0$.

a) $y = x^2 + 2x - 3$. **b)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 6$.

2.43. Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy xác định giá trị của m và n trong công thức của hàm số $y = mx^2 + nx$, biết

a) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -1 tại $x = 1$.

b) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại điểm $A(2; 0)$ và đi qua điểm $B(3; 6)$.

2.44. Hãy xác định giá trị của a, b, c. Biết parabol $y = ax^2 + bx + c$.

a) Có trục đối xứng là $x = 1$, đi qua hai điểm $A(2; 3)$ và $B\left(-1; \frac{9}{2}\right)$.

b) Có đỉnh là $I(2; 6)$ và đi qua điểm $A(-1; -3)$.

2.45. Hãy xác định giá trị của a, b, c. Biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ sinh ra từ parabol $y = -\frac{1}{2}x^2$ qua hai phép tịnh tiến song song với trục hoành qua bên trái 2 đơn vị và tịnh tiến song song với trục tung lên phía trên $\frac{5}{2}$ đơn vị.

2.46. **a)** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Từ đồ thị (P) hãy vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số

$$y = |x^2 - 4x + 3|.$$

c) Từ đồ thị (P) hãy vẽ đồ thị và lập bảng biến thiên của hàm số

$$y = x^2 - 4|x| + 3.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

2.47. Tìm miền xác định của các hàm số

a) $y = \dfrac{2x - 1}{2x^2 + 5x + 3}$. **b)** $y = \sqrt{x - 2} + \dfrac{1}{\sqrt{7 - 2x}}$.

c) $y = \dfrac{x}{|x + 1| + |x - 1| - 2}$. **d)** $y = \sqrt{3 - 2x} + \dfrac{1}{\sqrt{x|x| - 1}}$.

2.48. Tìm giá trị của m để hàm số $y = \dfrac{x + m}{x + 2 - m}$ xác định với $x \in [0; 1]$.

2.49. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số :

a) $y = (2 - 3x)^{10} + (2 + 3x)^{10}$. **b)** $y = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$.

c) $y = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{với} \quad x \le -1 \\ 0 & \text{với} \quad -1 < x < 1. \\ x^3 - 1 & \text{với} \quad x \ge 1 \end{cases}$ **d)** $y = x^4 - x + 1$.

2.50. Với giá trị nào của m hàm số $y = \dfrac{m}{2x + 1}$ đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

2.51. **a)** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \left|\dfrac{3}{2}x + 2\right| - 1$.

b) Biện luận theo m số giao điểm của đồ thị với đường thẳng $y = x + m$.

2.52. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng nó có trục đối xứng là đường $x = -1$, đi qua gốc tọa độ và điểm A(1; 3).

2.53. Chỉ rõ hai phép tịnh tiến parabol $y = 2x^2$ để có được parabol

$$y = 2x^2 - 4x - 1.$$

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Khái niệm phương trình, phương trình bậc nhất một ẩn

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình một ẩn

- *Mệnh đề chứa một biến x dạng $f(x) = g(x)$ được gọi là **phương trình một ẩn**, x là ẩn số, $f(x)$ là **vế trái**, $g(x)$ là **vế phải** của phương trình.*
- ***Điều kiện xác định** (ĐKXĐ) của phương trình là điều kiện cho ẩn x sao cho các biểu thức của hai vế có nghĩa.*
- *Mỗi số x_0 thỏa mãn ĐKXĐ sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ là mệnh đề đúng, là **một nghiệm** của phương trình. Một phương trình có tập nghiệm bằng $\varnothing$ gọi là phương trình **vô nghiệm**.*

2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả

Cho hai phương trình :

$$f_1(x) = g_1(x) \qquad (1)$$

$$f_2(x) = g_2(x) \qquad (2)$$

*Ta bảo phương trình (1) là **phương trình hệ quả** của phương trình (2), kí hiệu $f_2(x) = g_2(x) \Rightarrow f_1(x) = g_1(x)$ nếu tập nghiệm của (2) là tập hợp con của tập nghiệm của (1).*

*Hai phương trình (1) và (2) là **tương đương**, kí hiệu*

$$f_1(x) = g_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) = g_2(x)$$

nếu các tập nghiệm của (1) và (2) bằng nhau.

3. Phép biến đổi tương đương

***Định lí** : Gọi D là ĐKXĐ của phương trình $f(x) = g(x)$ và $h(x)$ là biểu thức xác định với mọi x thỏa mãn D thì*

***a)** $f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$*

***b)** Nếu $h(x) \neq 0$ với mọi x thỏa mãn D thì*

$$f(x).h(x) = g(x).h(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x).$$

4. Phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình có dạng $ax + b = 0$, trong đó x là ẩn, a, b là các số đã *cho với $a \neq 0$ gọi là* ***phương trình bậc nhất một ẩn****, x là ẩn số, a, b là các hệ số.*

Phương trình $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.

5. Giải và biện luận phương trình ax + b = 0

- *Nếu $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$.*
- *Nếu $a = 0$, $b \neq 0$, phương trình vô nghiệm.*
- *Nếu $a = 0$, $b = 0$, mọi số thực đều là nghiệm của phương trình.*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.1. Các cặp phương trình sau đây có tương đương không ?

a) $3x + 1 = 2x + 4$ và $3x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2x + 4 + \frac{1}{x-1}$.

b) $3x + 1 = 2x + 4$ và $3x + 1 + \frac{1}{x-3} = 2x + 4 + \frac{1}{x-3}$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định của phương trình :

$$3x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2x + 4 + \frac{1}{x-1} \quad (1) \quad \text{là } D = \{x \in R \,/\, x \neq 1\}.$$

Với $x \in D$ thì $\frac{1}{x-1} \neq 0$ và như vậy

$$(1) \Rightarrow 3x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = 3 \in D$$

Hai phương trình có chung nghiệm x = 3. Vậy hai phương trình đã cho tương đương.

b) Điều kiện xác định của phương trình

$$3x + 1 + \frac{1}{x-3} = 2x + 4 + \frac{1}{x-3} \quad (2) \quad \text{là } x \in D = \{x \in R \,/\, x \neq 3\}.$$

Với $x \in D$ thì $\frac{1}{x-3} \neq 0$ và (2) $\Rightarrow 3x + 1 = 2x + 4 \Rightarrow x = 3$

Nhưng $3 \notin D$. Như vậy hai phương trình đã cho không tương đương.

3.2. Giải các phương trình :

a) $3x + \sqrt{x-3} = x + 2 + \sqrt{x-3}$ (1).   **b)** $\sqrt{3x-3} + 1 = \sqrt{1-x}$ (2).

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định : $x \geq 3$.

Với $x \geq 3$ thì (1) $\Rightarrow$ $3x = x + 2$ $\Rightarrow$ $x = 1$.

Nhưng $x = 1$ không thỏa mãn ĐKXĐ. Vậy (1) vô nghiệm.

b) Điều kiện để $\sqrt{3x-3}$ xác định là $x \geq 1$. Điều kiện để $\sqrt{1-x}$ xác định là $x \leq 1$. Suy ra ĐKXĐ của (2) là $x = 1$.

Với $x = 1$ thì $\sqrt{3.1-1} + 1 \neq \sqrt{1-1}$. Vậy phương trình (2) vô nghiệm.

3.3. Cho các phương trình bậc nhất với tham số m :

$$3mx + 1 = 2(m - x) \qquad (1)$$

$$m(5x - 1) = 2x + 1 \qquad (2)$$

Xác định giá trị của m để hai phương trình có một nghiệm chung.

Hướng dẫn

Ta có : (1) $\Leftrightarrow$ $(3m + 2)x = 2m - 1$

Nếu $3m + 2 \neq 0$, tức là nếu $m \neq -\frac{2}{3}$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{2m-1}{3m+2}$

(2) $\Leftrightarrow$ $(5m - 2)x = m + 1$

Nếu $5m - 2 \neq 0$, tức là nếu $m \neq \frac{2}{5}$ thì (2) có nghiệm $x = \frac{m+1}{5m-2}$.

Để (1) và (2) có nghiệm chung thì m phải lấy các giá trị sao cho $m \neq -\frac{2}{3}$, $m \neq \frac{2}{5}$ và thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{2m-1}{3m+2} = \frac{m+1}{5m-2} \quad \Leftrightarrow \quad m = 0, \quad m = 2.$$

Thử lại, với $m = 0$ thì (1) và (2) có nghiệm chung $x = -\frac{1}{2}$. Với $m = 2$ thì nghiệm chung là $x = \frac{3}{8}$.

Kết luận với $m = 0$ hoặc $m = 2$ thì hai phương trình có một nghiệm chung.

3.4. Giải và biện luận phương trình với ẩn số x

a) $4x - 2 = m(mx - 1)$ (tham số m) (1)

b) $\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x^2+1)}{x^2-1}$ (tham số a, b) (2)

Hướng dẫn

a) (1) $\Leftrightarrow$ $m - 2 = m^2x - 4x$ $\Leftrightarrow$ $(m^2 - 4)x = m - 2$

- Nếu $m^2 - 4 \neq 0$, tức là nếu $m \neq \pm 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m-2}{m^2-4} = \frac{1}{m+2}$$

- Nếu $m = -2$, phương trình (1) trở thành $0x = -4$. Vô nghiệm.
- Nếu $m = 2$ thì (1) thành $0x = 0$, mọi số thực đều là nghiệm c phương trình.

b) ĐKXĐ : $x \in D = R \setminus \{-1; 1\}$.

(1) $\Rightarrow$ $(ax - 1)(x + 1) + b(x - 1) = a(x^2 + 1)$

$\Rightarrow$ $(a + b - 1)x = a + b + 1$

- Nếu $a + b = 1$ thì (2) trở thành $0x = 2$. Vô nghiệm.
- Nếu $a + b \neq 1$ ta có : $x = \frac{a+b+1}{a+b-1} \neq 1$ và $\frac{a+b+1}{a+b-1} \neq -1$

nếu $a + b \neq 0$.

Kết luận : Nếu $a + b \neq 1$ và $a + b \neq 0$ phương trình (2) có một nghiệ duy nhất $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$. Nếu $a + b = 1$ hoặc $a + b = 0$ thì (2) vô nghiện

3.5. Giải và biện luận theo tham số m :

a) $|x + m| = |x - m + 2|$ (1) **b)** $\frac{x}{\sqrt{x+m}} = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ (

Hướng dẫn

a) (1) $\Leftrightarrow$ $(x + m)^2 = (x - m + 2)^2$ $\Leftrightarrow$ $(x + m)^2 - (x - m + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x + m + x - m + 2)(x + m - x + m - 2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $(2x + 2)(2m - 2) = 0$

- Nếu $2m - 2 = 0$, tức là nếu $m = 1$, mọi số thực $x \in R$, đều là nghiệ của (1).
- Nếu $2m - 2 \neq 0$, tức nếu $m \neq 1$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = -1$.

b) Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow x\left[\frac{1}{\sqrt{x+m}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right] = 0 \qquad (\text{}$$

Điều kiện xác định : $D = \{x \in R \,/\, x > -1 \text{ và } x > -m\}$.

+ Nếu $m > 1$, tức là $-m < -1$ thì $D = \{x \in R / x > -1\}$

và (2) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

+ Nếu $m = 1$ thì $D = \{x \in R / x > -1\}$. Mọi $\alpha \in D$ đều là nghiệm của (2).

+ Nếu $0 < m < 1$, điều kiện xác định $D = \{x \in R / x > -m\}$.

Phương trình (2) có nghiệm $x = 0$.

+ Nếu $m \le 0$ phương trình (2) vô nghiệm.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.6. Giải phương trình :

a) $\dfrac{2x-3}{2} = \dfrac{4x+3}{3}$ (1)

b) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} - \dfrac{x-1}{x^2-x+1} = \dfrac{3}{x(x^4+x^2+1)}$ (2)

c) $\dfrac{1931-x}{75} + \dfrac{1925-x}{81} + \dfrac{1919-x}{87} = -3$ (3)

d) $\dfrac{x+1}{65} + \dfrac{x+3}{63} = \dfrac{x+5}{61} + \dfrac{x+7}{59}$ (4)

3.7. Xét sự tương đương của các cặp phương trình :

a) $2x + 3 = 8 - 3x$ và $\dfrac{2x+3}{x^2-1} = \dfrac{8-3x}{x^2-1}$.

b) $2x + 3 = 8 - 3x$ và $2x + 3 + \dfrac{2}{x^2-4} = 8 - 3x + \dfrac{2}{x^2-4}$.

3.8. Chỉ rõ rằng nghiệm của phương trình sau đây là một số nguyên :

$$\frac{x-55}{1950} + \frac{x-53}{1952} + \frac{x-51}{1954} + \frac{x-49}{1956} + \frac{x-47}{1958} + \frac{x-45}{1960} =$$

$$= \frac{x-1950}{55} + \frac{x-1952}{53} + \frac{x-1954}{51} + \frac{x-1956}{49} + \frac{x-1958}{47} + \frac{x-1960}{45} \quad (1)$$

3.9. Tìm điều kiện xác định của mỗi phương trình sau đây rồi suy ra tập nghiệm của nó.

a) $2x - 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{1-x} + 1$ (1)

b) $3 + \sqrt{-x^2 + 6x - 9} = x^2 - 6$ (2)

3.10. Giải các phương trình :

a) $x + 1 + \sqrt{x-2} = 2 - \sqrt{x-2}$ (

b) $x^2 + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 9$ (

3.11. Tìm giá trị của tham số sao cho phương trình :

a) $m^2x + 5 = m(x + 1)$ (1) vô nghiệm

b) $m^2x - m = 25x - 5$ (2) có vô số nghiệm

c) $m(m + 1)x + 1 = m^2$ (3) có nghiệm duy nhất.

3.12. Giải và biện luận theo tham số m phương trình :

a) $m^2(x - 1) = 9x + 3m$ (1) **b)** $\dfrac{mx + m - 2}{x - m} = 3$ (

c) $\dfrac{x + m}{x + 3} + \dfrac{x - 3}{x - m} = 2$ (3) **d)** $|mx + 1| = |3x + m - 2|$ (

3.13. Giải và biện luận theo tham số m, k các phương trình :

a) $x - m^2x - \dfrac{k^2}{k^2 - x^2} + m = \dfrac{x^2}{x^2 - k^2}$ (

b) $\dfrac{x - mk}{m + k} + \dfrac{x}{m} + \dfrac{x}{k} = m + k$ (

§2. Phương trình - hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng $ax + by = c$ (

trong đó a, b, c là các số đã biết với $a.b \neq 0$*, x, y là các ẩn số.*

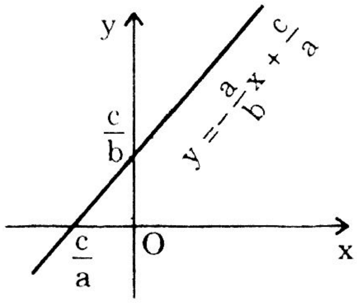
Cặp số (x_0, y_0) *thỏa mãn* $ax_0 + by_0 = c$ *thì* (x_0, y_0) *được gọi là m nghiệm của (1). Phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm, bi diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng* $ax + by = c$.

2. Giải và biện luận phương trình ax + by = c (1)

a) *Nếu* $a \neq 0$, $b \neq 0$, *phương trình (1) có vô số nghiệm. Công th nghiệm tổng quát của phương trình là :*

$$\left(x; \frac{c - ax}{b}\right),\ x \in R \quad \text{hoặc} \quad \left(\frac{c - by}{a}; y\right),\ y \in R.$$

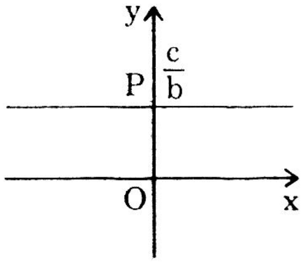
Tập nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đồ thị hàm số $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{a}$. *Còn gọi là đường thẳng* $ax + by = c$.



b) *Nếu* $a = 0$, $b \neq 0$, *phương trình có dạng* $by = c$.

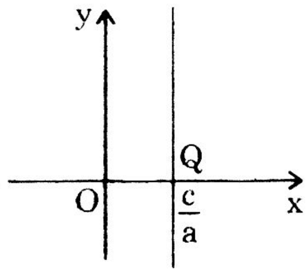
Công thức nghiệm tổng quát là : $\left(x; \frac{c}{b}\right)$, $x \in R$.

Tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với trục hoành $y = \frac{c}{b}$ *cắt trục tung tại điểm* $P\left(0; \frac{c}{b}\right)$.



c) *Nếu* $a \neq 0$, $b = 0$, *phương trình có dạng* $ax = c$. *Công thức nghiệm tổng quát là :* $\left(\frac{c}{a}; y\right)$, $y \in R$.

Tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng $x = \frac{c}{a}$, *song song với trục tung, cắt trục hoành tại điểm* $Q\left(\frac{c}{a}; 0\right)$.



d) *Nếu* $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ *hệ vô nghiệm.*

e) *Nếu* $a = b = c = 0$. *Mọi cặp số* (x, y), $x \in R$, $y \in R$ *đều là nghiệm của phương trình.*

3. Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn (x và y) có dạng

$$(I)\quad \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

trong đó (1) và (2) là các phương trình bậc nhất hai ẩn.

Kí hiệu : $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$, *gọi là định thức của hệ (I)*

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Ta có quy tắc giải hệ phương trình (I) gọi là ***quy tắc Crame*** *như sau :*

a) *Nếu $D \neq 0$, hệ (I) có một nghiệm duy nhất (x_0, y_0) được xác định b*
công thức :

$$x_0 = \frac{D_x}{D}; \quad y_0 = \frac{D_y}{D}.$$

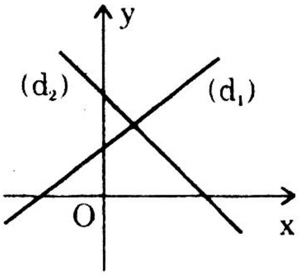
b) *Nếu $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$, hệ (I) vô nghiệm.*

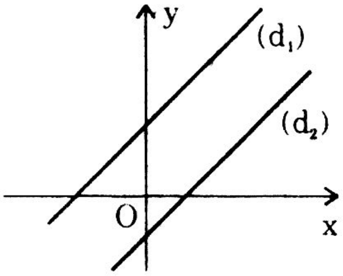
c) *Nếu $D = D_x = D_y = 0$ hệ (I) có vô số nghiệm là tập nghiệm c*
phương trình $a_1x + b_1y = c_1$ (hoặc $a_2x + b_2y = c_2$).

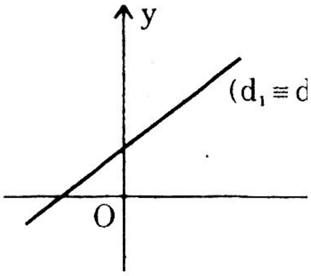
4. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ phương trình bậc nh hai ẩn

Gọi (d_1) là đường thẳng $a_1x + b_1y = c_1$ và (d_2) là đường thẳng $a_2x + b_2y = c$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi d_1 và d_2 cắt nhau, vô nghiệ khi và chỉ khi $d_1 // d_2$, có vô số nghiệm khi và chỉ khi (d_1) và (d_2) trùn nhau.







B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.14. Giải phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu diễn nghiệm trên m phẳng tọa độ :

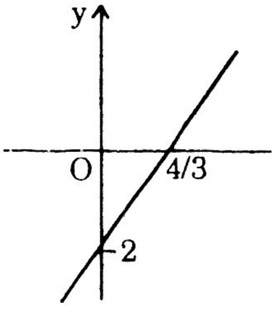
a) $3x - 2y = 4$. **b)** $-2x + 3y = 6$.

Hướng dẫn

a) Phương trình có vô số nghiệm.

Công thức nghiệm tổng quát của phương trình :

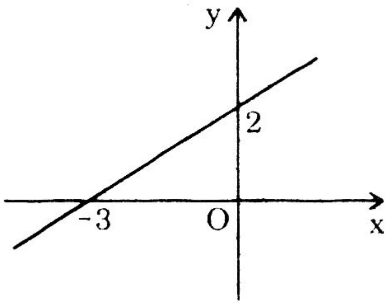
$$\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{3x - 4}{2} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{2y + 4}{3} \\ y \in R \end{cases}$$



Tập nghiệm được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}x - 2$ (hình bên).

b) Tương tự câu a).

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{2x+6}{3} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{3y-6}{2} \\ y \in R \end{cases}$$



Vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3}x + 2$ (hình bên).

3.15. Giải và biện luận theo tham số m phương trình bậc nhất hai ẩn x và y :

$$(2m - 3)x + (m - 1)y = m + 2 \qquad (1)$$

Hướng dẫn

+ Nếu $2m - 3 \neq 0$ và $m - 1 \neq 0$ tức là nếu $m \neq \dfrac{3}{2}$ và $m \neq 1$ thì (1) có vô số nghiệm với công thức nghiệm

$$\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{(3-2m)x + m + 2}{m-1} \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = \dfrac{(m+2) + (1-m)y}{2m-3} \\ y \in R \end{cases}$$

Tập nghiệm biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng không song song với các trục tọa độ.

+ Nếu $m = \dfrac{3}{2}$, công thức nghiệm là : $(x; 7)$ với $x \in R$. Biểu diễn tập nghiệm trên mặt phẳng tọa độ là đường thẳng song song với trục hoành $y = 7$.

+ Nếu $m = 1$, công thức nghiệm là $(-3; y)$ với $y \in R$.

Tập nghiệm được biểu diễn bởi đường thẳng song song với trục tung $x = -3$.

3.16. Cho k là một số thực xác định. Hãy tìm một phương trình bậc nhất hai ẩn x, y sao cho cặp số $\left(2 - k; \dfrac{k}{2}\right)$ là nghiệm của phương trình đó.

Hướng dẫn

Đặt $x_0 = 2 - k$, $y_0 = \dfrac{k}{2}$ thì cặp số (x_0, y_0) là nghiệm của phương trình bậc nhất hai ẩn và hệ thức giữa x_0, y_0 như sau :

$$k = 2 - x_0 = 2y_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 + 2y_0 = 2.$$

Điều đó có nghĩa cặp số $\left(2 - k; \dfrac{k}{2}\right)$ là một nghiệm của phương trình

$$x + 2y = 2 \qquad (1)$$

Đảo lại, thay $x = 2 - k$ và $y = \dfrac{k}{2}$ vào (1) ta được $(2 - k) + 2\left(\dfrac{k}{2}\right) = 2$

Như vậy phương trình cần tìm là : $x + 2y = 2$.

3.17. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3x + y = 5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x-2} + y = 7 \\ \dfrac{2}{2-x} + 5y = 3. \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Áp dụng quy tắc Crame :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad D_x = \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 11; \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{11}{11} = 1\,; \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{22}{11} = 2$$

Nghiệm của hệ là cặp (1; 2) duy nhất.

b) Đặt $X = \dfrac{1}{x-2}$. ĐKXĐ : $x \neq 2$ ta được hệ :

$$\begin{cases} 3X + y = 7 \\ -2X + 5y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{32}{17} \\ y = \dfrac{23}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{81}{32} \\ y = \dfrac{23}{17}. \end{cases}$$

3.18. Giải hệ phương trình : (I) $\begin{cases} |x - y| - 2x = 3 \\ 3x + |y| = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Nếu $x - y \geq 0$, $y \geq 0$ thì hệ (I) trở thành : $\begin{cases} -x - y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = -1; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = -5$$

Cặp giá trị (–1; –5) không thỏa mãn điều kiện $y \geq 0$ nên không phải là nghiệm của hệ (I).

b) Nếu $x - y < 0$, $y \geq 0$ thì hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} -3x + y = 3 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}, \quad y = 2$$

Cặp $\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$ thỏa mãn điều kiện $x - y < 0$, $y \geq 0$ nên là một nghiệm của hệ (I).

c) Nếu $x - y \geq 0$, $y < 0$ hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} -x - y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{5}{2} \text{ (nhận).}$$

d) Nếu $x - y < 0$, $y < 0$ thì (I) trở thành

$$\begin{cases} -3x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Tóm lại : Hệ thống phương trình (I) có các nghiệm là :

$$\left(-\frac{1}{3}; 2\right) \text{ và } \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

3.19. Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

trong đó m là tham số. Với giá trị nào của m hệ (I) có một nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

Hướng dẫn

Theo quy tắc Crame, ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m + 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m + 1 \end{vmatrix} = m(m + 1) - 2m = m^2 - m.$$

Nếu $D \neq 0$, tức là $m^2 - 1 \neq 0$, hay $m \neq \pm 1$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất được xác định theo công thức

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 - 1} = \frac{2m + 1}{m + 1}; \qquad y = \frac{D_y}{D_x} = \frac{m^2 - m}{m^2 - 1} = \frac{m}{m + 1}.$$

3.20. Giải và biện luận theo tham số a hệ phương trình (I) $\begin{cases} 6ax + (2 - a)y = 3 \\ (a - 1)x - ay = 2 \end{cases}$

Trong trường hợp hệ (I) có nghiệm duy nhất, hãy tìm một hệ thức giữa x và y độc lập với tham số a.

Hướng dẫn

Theo quy tắc Crame ta có :

$$D = \begin{vmatrix} 6a & 2-a \\ a-1 & -a \end{vmatrix} = -6a^2 - (2-a)(a-1) = -5a^2 - 3a + 2$$

$$D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5a^2 - 3a + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -1 \quad \text{hay} \quad a = \frac{2}{5}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 2-a \\ 2 & -a \end{vmatrix} = -a - 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 6a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 9a + 3.$$

- Nếu $a = -1$ thì $D = 0$, $D_x = -3 \neq 0$. Hệ vô nghiệm.
- Nếu $a = \frac{2}{5}$ thì $D = 0$, $D_x = -\frac{22}{5} \neq 0$. Hệ vô nghiệm.
- Nếu $a \neq -1$, $a \neq \frac{2}{5}$ thì $D \neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất sau :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-a-4}{-5a^2 - 3a + 2} & (1) \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{9a+3}{-5a^2 - 3a + 2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra : $\dfrac{-(a+4)}{x} = -5a^2 - 3a + 2$

Từ (2) suy ra : $\dfrac{9a+3}{y} = -5a^2 - 3a + 2$

(3) và (4) $\Rightarrow \quad \dfrac{-(a+4)}{x} = \dfrac{9a+3}{y}$

$$\Rightarrow \quad (9a+3)x = -(a+4)y \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-(3x+4y)}{9x+y}$$

Thay trong phương trình của hệ (I) ta được :

$$(a-1)x - ay = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{-3x-4y}{9x+y} - 1\right)x + \frac{3x+4y}{9x+y}y = 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 6x^2 - 2y^2 + xy + 9x + y = 0$$

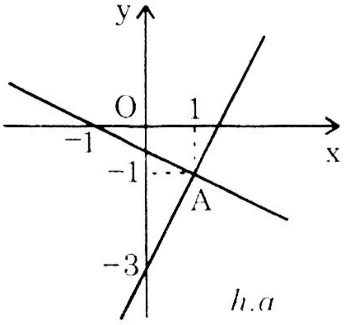
Hệ thức (6) giữa x và y độc lập với tham số a.

3.21. Giải bằng phương pháp hình học và kiểm tra lại bằng tính toán các hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$ (I) **b)** $\begin{cases} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 6x - 4y - 7 = 0 \end{cases}$ (II)

Hướng dẫn

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$



h.a

Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x - 3$ và $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ (xem hình h.a).

Giao điểm A của 2 đồ thị có tọa độ A(1; –1). Vậy $x = 1$, $y = -1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

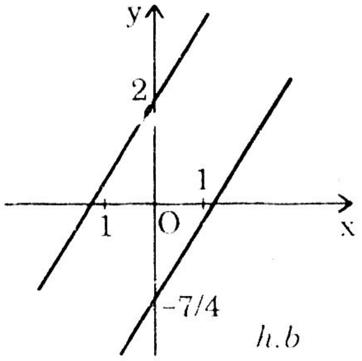
Kiểm tra lại bằng tính toán :

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad D_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \qquad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5}{5} = 1, \qquad y = \frac{D_y}{D_x} = \frac{-5}{5} = -1.$$

b) Làm tương tự câu a).

$$\text{(II)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{3}{2}x + 2 \\ y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4} \end{cases}$$



h.b

Trên cùng một hệ trục tọa độ, đồ thị các hàm $y = \dfrac{3}{2}x + 2$ và $y = \dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{4}$ là các đường thẳng song song. Hệ (II) vô nghiệm.

Kiểm tra lại bằng tính toán :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0, \qquad D_x = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 45 \neq 0$$

Vì $D = 0$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$. Hệ (II) vô nghiệm.

PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN VỚI HỆ SỐ NGUYÊN

Xét phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$ (1

trong đó các hệ số a, b, c là các số nguyên.

Bài toán đặt ra là tìm các cặp số nguyên (x_0, y_0) *là nghiệm của (1. Người ta chứng minh được các định lí sau :*

Định lí 1 : *Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi c chia hết ch UCLN (a, b).*

Định lí 2 : *Nếu (1) có nghiệm nguyên* (x_0, y_0) *thì nó có vô số nghiện nguyên (x, y) theo công thức*

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{d}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{d}t \end{cases} \quad \text{với } t \in Z,\ d = \text{UCLN}(a, b).$$

Việc tìm nghiệm nguyên của phương trình $ax + by = c$ *với* $a, b, c \in$ *gọi là giải phương trình vô định. Người đặt nền móng cho nhữn nghiên cứu về giải phương trình vô định là nhà toán học cổ Hi Lạ Điôphăng thế kỉ thứ 3 sau công nguyên.*

Ta minh họa một phương pháp giải phương trình vô định qua các bà toán.

3.22. Giải các phương trình vô định :

a) $32x + 48y = 112$ (1) **b)** $6x - 3y = 4$ (2).

Hướng dẫn

a) Ta có : UCLN (32, 48) = 16 và $112 \vdots 16$. Vậy phương trình (1) c nghiệm. Chia hai vế cho 16 ta được

$$(1) \Leftrightarrow 2x + 3y = 7 \Rightarrow x = \frac{7 - 3y}{2} = 3 - y + \frac{1 - y}{2}.$$

Để $x \in Z$ thì phải chọn $y \in Z$ sao cho $\dfrac{1 - y}{2} \in Z$.

Đặt $\dfrac{1 - y}{2} = u \in Z$ ta có : $y = 1 - 2u,\ u \in Z$

$x = 3 - (1 - 2u) + u = 2 + 3u$. Rõ ràng với $u = 0$ ta có $x = 2$, $y = 1$. Cặ số (2; 1) là một nghiệm của phương trình. Công thức nghiệm tổng quá của phương trình là : $\begin{cases} x = 2 + 3u \\ y = 1 - 2u \end{cases}$ $u \in Z$

b) Ta có : UCLN (6; −3) = 3 mà $4 \not\vdots\ 3$. Vậy (2) vô nghiệm.

3.23. Giải phương trình vô định : $38x + 117y = 109$ (1

Hướng dẫn

ƯCLN (38, 117) = 1. Vậy phương trình (1) có nghiệm.

$$(1) \Rightarrow \quad x = -3y + 2 + \frac{33 - 3y}{38} \qquad (2$$

Đặt $\frac{33 - 3y}{38} = u \in Z$ ta suy ra $y = 11 - 12u - \frac{2u}{3}$.

Đặt $\frac{2}{3}u = v \in Z$ ta suy ra $u = v - \frac{v}{2}$.

Đặt $\frac{v}{2} = t \in Z$ suy ra : $v = 2t$, $u = 3t$

$$y = 11 - 38t,$$

$$x = -3(11 - 38t) + 2 + 3t = -31 + 117t.$$

Cho $t = 0$ ta được một nghiệm của (1) là $(-31, 11)$.

Nghiệm tổng quát của phương trình (1) là : $\begin{cases} x = -31 + 117t \\ y = 11 - 38t \end{cases}$ $t \in Z$.

3.24. Cho hệ phương trình với tham số m : (I) $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$

Tìm những giá trị nguyên của m để hệ phương trình (I) có nghiệı nguyên.

Hướng dẫn

Theo quy tắc Crame ta tính :

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4, \qquad D_x = \begin{vmatrix} m + 1 & 2 \\ 2m - 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m + 1 \\ 2 & 2m - 1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m + 2$$

Hệ (I) có nghiệm nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó :

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m^2 - 3m + 2}{m^2 - 4} = \dfrac{m - 1}{m + 2} = 1 - \dfrac{3}{m + 2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{2m^2 - 3m - 2}{m^2 - 4} = \dfrac{2m + 1}{m + 2} = 2 - \dfrac{3}{m + 2} \end{cases}$$

Để $x, y \in Z$ ta phải lấy $m \in Z$ sao cho $m + 2$ là ước của 3. Tức là phả chọn $m + 2 = \pm 1, \pm 3 \Leftrightarrow m \in \{-5, -3, -1, 1\}$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.25. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

3.26. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ (m + 1)x + y = 3 - m, \end{cases}$ m là tham số

Với giá trị nào của m thì cặp số (3; 2) là một nghiệm của hệ.

3.27. Cho phương trình với tham số m : $(3m - 2)x + 5y = m + 3$ (1)

a) Tùy theo giá trị của m, hãy viết công thức nghiệm của (1).

b) Tìm cặp số (x_0, y_0) là nghiệm của (1), dù m lấy bất kì giá trị nào.

3.28. Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} (m - 1)x + 2my = -2 \\ 2mx + (m - 1)y = m - 1 \end{cases}$

Với giá trị nào của m thì hệ (I) có vô số nghiệm.

3.29. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp đồ thị :

a) (I) $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -4x - 2y = -6. \end{cases}$

3.30. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình :

a) $\begin{cases} mx + (m + 2)y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1. \end{cases}$

3.31. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{4}{x - 3} + \dfrac{5}{y + 1} = 2 \\ \dfrac{5}{x - 3} + \dfrac{1}{y + 1} = \dfrac{29}{20} \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{x}{x + 2} + \dfrac{2y}{y + 1} = \dfrac{29}{15} \\ \dfrac{2x}{x + 2} - \dfrac{y}{y + 1} = \dfrac{8}{15} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{2}{x - y} + \dfrac{3}{x + y} = 3 \\ \dfrac{4}{x - y} - \dfrac{9}{x + y} = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} \dfrac{3}{x + y - 1} - \dfrac{1}{2x - y + 1} = \dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x + y - 1} + \dfrac{2}{2x - y + 1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

3.32. Giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ 2x + 3y - z = 11 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} |x| + 3y = 5 \\ 5x + |y| = -9. \end{cases}$

3.33. Giải phương trình vô định :

a) $12x - 10y = 4$ **b)** $7x + 12y = 5$.

3.34. Cho hệ phương trình với tham số m : (I) $\begin{cases}(m+1)x - 2y = m - 1\\ m^2x - y = m^2 + 2m.\end{cases}$

Tìm các giá trị nguyên của m sao cho hệ có nghiệm nguyên.

§3. Phương trình bậc hai một ẩn

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Công thức nghiệm

Phương trình bậc hai (một ẩn x) có dạng $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

trong đó a, b, c là các số đã biết gọi là các hệ số, x là ẩn số.

Đặt $\Delta = b^2 - 4ac$ ($\Delta' = b'^2 - ac$ *với* $b = 2b'$) *và gọi là biệt thức của phương trình (1).*

a) *Nếu* $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$), *phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cho bởi công thức :*

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ và } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(\text{hay } x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \text{ và } x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

b) *Nếu* $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$), *phương trình (1) có một nghiệm (nghiệm kép)*

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \left(\text{hay } x_1 = x_2 = -\frac{b'}{a}\right)$$

c) Nếu $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$), *phương trình (1) vô nghiệm.*

2. Định lí Vi-et và ứng dụng

Định lí : *Nếu phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) *có các nghiệm là* x_1 *và* x_2 *thì tổng và tích các nghiệm của phương trình theo thứ tự là :*

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ứng dụng :

+ **Nhẩm nghiệm** *của phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) (1)

- *Nếu (1) có các hệ số thỏa mãn* $a + b + c = 0$ *thì nó có một nghiệm* $x_1 = 1$ *và nghiệm kia* $x_2 = \frac{c}{a}$.

- *Nếu (1) có các hệ số thỏa mãn $a - b + c = 0$ thì nó có nghiệm $x_1 = -1$ và nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.*

+ ***Tìm hai số biết tổng và tích của chúng***

Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì các số ấy là các nghiệm của phương trình :

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

+ ***Phân tích một tam thức bậc hai thành nhân tử***

Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.35. Cho phương trình : $(m^2 - 1)x - 2(m + 1)x + 1 = 0$ (1)

trong đó m là tham số.

a) Với giá trị nào của m phương trình có 1 nghiệm.

b) Với giá trị nào của m phương trình vô nghiệm.

Hướng dẫn

a) Phương trình (1) có dạng : $ax^2 + bx + c = 0$, với $a, b, c \in R$.

Phương trình (1) có một nghiệm nếu xảy ra một trong các trường hợp sau :

+ $a = m^2 - 1 = 0$ và $b = -2(m + 1) \neq 0 \Leftrightarrow m = 1$

+ $a = m^2 - 1 \neq 0$ và $\Delta' = (m + 1)^2 - (m^2 - 1) = 2m + 2 = 0$.

Trường hợp này không xảy ra.

Kết luận : Phương trình (1) có một nghiệm chỉ khi $m = 1$.

b) Phương trình (1) vô nghiệm nếu xảy ra một trong các trường hợp sau :

+ $a = m^2 - 1 = 0$ và $b = -2(m + 1) = 0$, $c = 1 \neq 0 \Leftrightarrow m = -1$.

+ $a = m^2 - 1 \neq 0$ và $\Delta' = 2m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Tổng hợp lại : Phương trình (1) vô nghiệm khi $m \leq -1$.

3.36. Giải và biện luận phương trình với tham số m :

a) $(m + 2)x^2 + 2(3m - 2)x + m + 2 = 0$ (1)

b) $(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$ (2)

Hướng dẫn

a) + Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ phương trình (1) trở thành

$$-16x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ là nghiệm duy nhất.}$$

+ Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$ thì (1) là phương trình bậc hai có biệt thức $\Delta' = (3m - 2)^2 - (m + 2)^2 = 8m^2 - 16m$.

$$\Delta' = 8m(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 2$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ hoặc } m = 2$$

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2.$$

Tổng hợp kết quả :

+ Nếu $m \in \{-2, 0, 2\}$ (1) có một nghiệm.

+ Nếu $m < 0$ và $m \neq -2$ hoặc $m > 2$ thì (1) có hai nghiệm.

+ Nếu $0 < m < 2$ thì (1) vô nghiệm.

b) – Nếu $m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ thì (2) có nghiệm $x = \frac{3}{4}$.

– Nếu $m - 4 \neq 0$ ta xét $\Delta' = (m - 2)^2 - (m - 1)(m - 4) = m$.

$m < 0$ vô nghiệm, $m = 0$ có nghiệm kép và $m > 0$, $m \neq 4$ phương trình (2) có 2 nghiệm.

Tóm lại :

- Nếu $m < 0$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $m = 0$ hoặc $m = 4$ thì (2) có nghiệm duy nhất.
- Nếu $m > 0$ và $m \neq 4$ thì (2) có hai nghiệm $x_1 \neq x_2$.

3.37. Cho a, b, c là 3 số thực không đồng thời bằng 0.

a) Chứng minh rằng phương trình

$$a(x - b)(x - c) + b(x - a)(x - c) + c(x - a)(x - b) = 0 \qquad (1)$$

luôn luôn có nghiệm.

b) Hãy tìm điều kiện để phương trình chỉ có một nghiệm.

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow (a + b + c)x^2 - 2(ab + ac + bc)x + 3abc = 0$

- Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình trở thành :

$$2(ab + ac + bc)x - 3abc = 0.$$

Từ $a + b + c = 0$ suy ra $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 0$

$\Rightarrow ab + ac + bc = -\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \neq 0$ (vì a, b, c không đồng thời bằng 0). Do đó (1) có nghiệm $x = \dfrac{3abc}{ab + bc + ac}$.

- Nếu $a + b + c \neq 0$ thì ta có phương trình bậc hai với biệt thức

$$\begin{aligned}\Delta &= (ab + bc + ac)^2 - 3abc(a + b + c)\\ &= a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^2bc - b^2ac - c^2ab\\ &= \frac{1}{2}[(ab - ac)^2 + (ab - bc)^2 + (ac - bc)^2] \geq 0\end{aligned}$$

Do đó phương trình (1) có nghiệm.

b) Để phương trình có nghiệm duy nhất thì phải có điều kiện $a + b + c = 0$ hoặc $a + b + c \neq 0$ và $\Delta = 0$, tương đương với hệ

$$\begin{cases} a + b + c \neq 0\\ ab - ac = 0\\ ac - bc = 0\\ ab - bc = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = b = c \neq 0 \text{ hoặc } a = b = 0,\ c \neq 0\\ \text{hoặc } a = c = 0,\ b \neq 0 \text{ hoặc } b = c = 0,\ a \neq 0.\end{array}$$

3.38. Cho phương trình với tham số m :

$$mx^2 - 2(m - 1)x + 3(m - 2) = 0 \qquad (1)$$

Tìm giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức : $x_1 + 2x_2 = 1$.

Hướng dẫn

(1) có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\text{(I)} \begin{cases} m \neq 0\\ \Delta = (m - 1)^2 - 3m(m - 2) > 0\end{cases}$$

Theo hệ thức Viet ta có : $\text{(II)} \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m - 1)}{m}\\ x_1x_2 = \dfrac{3(m - 2)}{m}\end{cases}$

Từ hệ thức $x_1 + 2x_2 = 1$ suy ra $x_1 = 1 - 2x_2$. Thế vào các hệ thức của (II) ta được :

$$\begin{cases} 1 - x_2 = \dfrac{2(m - 1)}{m}\\ (1 - 2x_2)x_2 = \dfrac{3(m - 2)}{m}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 - \dfrac{2(m - 1)}{m} = \dfrac{2 - m}{m}\\ \left(1 - \dfrac{2(2 - m)}{m}\right)\left(\dfrac{2 - m}{m}\right) = \dfrac{3(m - 2)}{m}\end{cases}$$

Từ đó ta tìm ra $m = 2$ hoặc $m = \dfrac{2}{3}$.

3.39. Cho phương trình bậc hai với tham số m :

$$x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0 \qquad (1)$$

a) Tìm m để (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2.

b) Tìm một hệ thức giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc m.

c) Tìm giá trị của m để $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

d) Tìm giá trị của m để $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) $\Delta' = (m + 4)^2 - (m^2 - 8) = 8m + 24 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -3.$

b) Với $m \geq -3$, theo hệ thức Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m + 4) \\ x_1x_2 = m^2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{x_1 + x_2}{2} - 4 \\ x_1x_2 = \left[\dfrac{x_1 + x_2}{2} - 4\right]^2 - 8 \end{cases}$$

Từ đó ta có hệ thức $(x_1 - x_2)^2 - 16(x_1 + x_2) + 32 = 0.$

c) $A = x_1 + x_2 - 3x_1x_2 = 2(m + 4) - 3(m^2 - 8) = -3m^2 + 2m + 32$

$$= -3\left(m - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{97}{3} \leq \frac{97}{3} \quad \forall m.$$

A đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{97}{3}$ khi $m = \dfrac{1}{3}$.

d) $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2$

$= 4(m + 4)^2 - 3(m^2 - 8) = m^2 + 32m + 88 = (m + 16)^2 - 168$

Vì $(m + 16)^2$ đồng biến khi $m \geq -16$

Do đó với $m \geq -3$ thì B đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = -3$

$$B_{min} = (-3 + 16)^2 - 168 = 1.$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

3.40. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{2x - 5}{x - 1} = \dfrac{5x - 3}{3x + 5}$.

b) $\dfrac{5 - x}{2x - 1} = \dfrac{15 - 4x}{3x + 1}$.

c) $\dfrac{2}{x^2 - 4} = \dfrac{1}{x^2 - 2x} + \dfrac{4 - x}{x^2 + 2x}$.

3.41. Giải phương trình :

a) $(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6) = 120$. **b)** $2x^2 - 3x - 2\sqrt{2x^2 - 3x} = 3$.

3.42. Giải phương trình :

a) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$. **b)** $2x^4 + 7x^2 + 6 = 0$.

c) $2x^4 - 7x - 4 = 0$.

3.43. Cho phương trình : $(m^2 - 4)x^2 + 2(m + 2)x + 1 = 0$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất.

3.44. Giải và biện luận theo m các phương trình :

a) $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

b) $(m + 1)x^2 - 2(m + 2)x + m - 3 = 0$

3.45. Cho hai phương trình chứa tham số m :

$$x^2 + mx + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + m = 0$$

a) Xác định m để hai phương trình có ít nhất một nghiệm chung.

b) Xác định m để phương trình $(x^2 + mx + 2)(x^2 + 2x + m) = 0$

có 4 nghiệm phân biệt.

3.46. Cho hai phương trình : $x^2 + mx + n = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

thỏa mãn điều kiện $mp \geq 2(q + n)$. Chứng minh rằng có ít nhất m
trong hai phương trình (1) và (2) có nghiệm.

3.47. Không giải, hãy nhẩm nghiệm của phương trình :

a) $3x^2 - 10x + 7 = 0$. **b)** $45x^2 + 2006x + 1961 = 0$.

3.48. Lập các phương trình bậc hai có các nghiệm :

a) Lớn hơn các nghiệm của $2x^2 + x - 3 = 0$ là 2.

b) Lớn hơn các nghiệm của $x^2 + px + q = 0$ là $\frac{p}{2}$.

3.49. Rút gọn các phân thức :

a) $A = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{6x^2 - 7x + 2}$; **b)** $B = \dfrac{3x^4 - 7x^2 - 6}{2x^4 - x^2 - 15}$.

3.50. Biểu diễn qua p, q.

a) Tổng các lập phương hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

b) Hiệu các lập phương hai nghiệm của phương trình $x^2 + px + q = 0$.

3.51. Xác định giá trị của m để phương trình :

$$(m + 2)x^2 + 2(m + 3)x + m - 1 = 0 \qquad (1)$$

a) Có hai nghiệm trái dấu.

b) Có đúng một nghiệm dương.

3.52. Xác định giá trị của m để

a) Phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$5x_1 + 2x_2 = 1.$$

b) Phương trình $x^2 - 4x + m^2 + 3m = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2).$$

3.53. Cho phương trình với tham số m :

$$x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m - 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Chứng minh rằng có một hệ thức giữa các nghiệm không phụ thuộc m.

3.54. Cho phương trình (ẩn số x) : $x^2 - (2m + 2)x + 2m + 5 = 0$

có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2.

Tìm giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

3.55. Cho phương trình : $x^2 + px + q = 0$ (1) có hai nghiệm dương.

Chứng minh rằng với mọi $r \geq 0$ phương trình

$$qy^2 + (p - 2rq)y + 1 - pr = 0 \qquad (2)$$

cũng có các nghiệm đều dương.

3.56. Tìm tất cả các số thực dương a, b, c, d sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

a) Phương trình $ax^2 + bdx + c = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2.

b) Phương trình $bx^2 + cdx + a = 0$ có hai nghiệm là x_2 và x_3.

c) Phương trình $cx^2 + adx + b = 0$ có hai nghiệm là x_3 và x_1.

§4. Một số hệ phương trình bậc hai hai ẩn đặc biệt

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Hệ hai phương trình, một phương trình bậc nhất, một phươn trình bậc hai

Cách giải : *Từ phương trình bậc nhất, biểu diễn một ẩn qua ẩn còi lại. Đem thế vào phương trình bậc hai rồi giải phương trình nhậ được.*

Ví dụ : Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + xy + y^2 = 3 \end{cases}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ x^2 + x(3 - 2x) + (3 - 2x)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - 2x \\ 3x^2 - 9x + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

2. Hệ phương trình đối xứng của hai ẩn

Hệ có dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$

trong đó f(x, y), g(x, y) là các hàm bậc hai hai biến x, y mà nếu ta đổi thành y, y thành x thì chúng không thay đổi

$$f(x, y) = f(y, x); \qquad g(x, y) = g(y, x).$$

Cách giải : *Đặt ẩn phụ S = x + y, P = xy. Giải hệ phương trình vớ các ẩn phụ, sau đó tìm các nghiệm với ẩn x, y.*

Ví dụ : Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 = 11 \\ 2xy - x - y = 1 \end{cases}$ (**)

Đặt $S = x + y$, $P = xy$, hệ phương trình (**) trở thành :

$$\begin{cases} S^2 + P = 11 \\ 2P - S = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2P - 1 \\ 4P^2 - 3P - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 3,\ P = 2 \\ S = -\dfrac{7}{2},\ P = -\dfrac{5}{4} \end{array}\right.$$

Với $S = 3$, $P = 2$ giải phương trình $X^2 - 3X + 2 = 0$ ta được các nghiệm của hệ là $x = 2$, $y = 1$ hoặc $x = 1$, $y = 2$.

Với $S = -\dfrac{7}{2}$, $P = -\dfrac{5}{4}$ ta được :

$$x = \frac{-7-\sqrt{69}}{4},\ y = \frac{-7+\sqrt{69}}{4} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{-7+\sqrt{69}}{4},\ y = \frac{-7-\sqrt{69}}{4}.$$

Còn một vài hệ phương trình bậc hai hai ẩn dạng đặc biệt khác được xét đến trong các ví dụ giải toán.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

3.57. Cho hệ phương trình :

$$\text{(I)} \begin{cases} x + y = m \\ x^2 + y^2 = 6 - m^2 \end{cases} \qquad \text{m là tham số.}$$

a) Giải hệ (I) với m = 1.

b) Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm.

Hướng dẫn

a) $m = 1$.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 + (1 - x)^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2,\ y = 1 \quad \text{hoặc} \quad x = -1,\ y = 2.$$

b) $$\text{(I)} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ (x + y)^2 - 2xy = 6 - m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = m \\ xy = m^2 - 3 \end{cases}$$

x, y là nghiệm của phương trình : $t^2 - mt + m^2 - 3 = 0$ (2)

Biệt thức của (2) : $\Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) = 3(4 - m^2)$

Nếu $|m| > 2$ thì (2) vô nghiệm, do đó hệ (I) vô nghiệm.

Nếu $-2 \le m \le 2$ thì (2) có nghiệm :

$$t_1 = \frac{m - \sqrt{3(4 - m^2)}}{2}, \qquad t_2 = \frac{m + \sqrt{3(4 - m^2)}}{2}.$$

Hệ (I) có các nghiệm $(t_1; t_2)$ hoặc $(t_2; t_1)$.

3.58. Xác định giá trị của m để hệ phương trình sau đây có nghiệm duy nhất

$$\text{(I)} \begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Hướng dẫn

Hệ (I) đối xứng đối với x, y, ta đặt $S = x + y$, $P = xy$ và biểu diễn các biểu thức trong (I) qua S và P.

$$\begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 - 2(m - S) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S \\ S^2 + 2S - 2m - 1 = 0 \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm khi và chỉ khi hệ sau đây có nghiệm

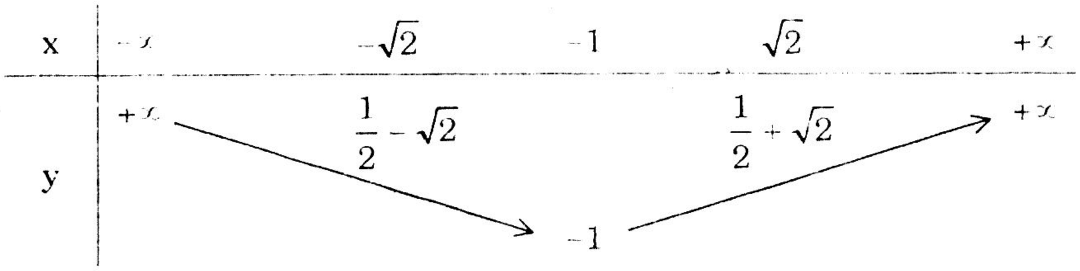
$$(*) \begin{cases} S^2 + 2S - 2m - 1 = 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \qquad (\text{Bởi vì } \; S^2 - 4P = (x - y)^2 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 2m + 1 \\ (2m + 1 - 2S) - 4(m - S) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 2m + 1 \\ 2S - 2m + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 2m + 1 \\ S \geq m - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S = 2m + 1 \\ S \geq \dfrac{S^2 + 2S - 1}{2} - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 + 2S - 2m - 1 = 0 \\ S^2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{S^2 + 2S - 1}{2} \\ -\sqrt{2} \leq S \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{1}{2}S^2 + S - \dfrac{1}{2}$ trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$



Qua bảng biến thiên cho thấy hệ (I) có nghiệm nếu $-1 \leq m \leq \dfrac{2\sqrt{2} + 1}{2}$.

3.59. Giải hệ phương trình : $(I) \begin{cases} x^2 - y^2 = 2x + y & (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn

Để ý rằng nếu đổi x thành y, y thành x thì phương trình (1) trở thành phương trình (2) và (2) trở thành (1). Một hệ như vậy có thể đưa về dạng

$$(A) \begin{cases} f(x, y) = 0 & (1) \\ f(y, x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(A) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) = 0 \\ f(x,y) - f(y,x) = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (A) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y) - f(y,x) = 0 \\ f(x,y) + f(y,x) = 0 \end{cases}$$

Trong bài đã cho ta thực hiện

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2x - y = 0 \\ 3x^2 - 3y^2 - x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2x - y = 0 \\ (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2x - y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (**) \begin{cases} x^2 - 2y^2 - 2x - y = 0 \\ 3x + 3y - = 0 \end{cases}$$

Giải hệ (*) ta được các nghiệm $x = 0$, $y = 0$ và $x = -3$, $y = -3$.

Giải hệ (**) ta thấy hệ vô nghiệm. Vậy hệ (I) có 2 nghiệm là $(0; 0)$ và $(-3; -3)$.

.60. Giải hệ phương trình : $(I) \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 & (1) \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 & (2) \end{cases}$

Hướng dẫn

Hệ (I) có thể xem là hệ đối xứng loại 2. Ta có thể giải theo như cách giải của bài 3.59. Tuy nhiên ta để ý rằng trong hệ (I) có các phương trình mà các hạng tử chứa ẩn đều là bậc hai. Ta gọi một hệ phương trình như vậy là hệ đẳng cấp bậc hai.

Cách giải một hệ phương trình như vậy là đặt $y = tx$ hay $x = ky$ sẽ đưa đến việc xác định t (hoặc k) và giải tiếp một phương trình ẩn x (hay ẩn y).

Trong bài này ta đặt $y = kx$ thì được $\begin{cases} x^2 \times (3 + 2k + k^2) = 11 \\ x^2 \times (1 + 2k + 3k^2) = 17 \end{cases}$

Rõ ràng $x = 0$ không thể là nghiệm. Chia vế với vế hai phương trình trên ta được

$$\frac{3 + 2k + k^2}{1 + 2k + 3k^2} = \frac{11}{17} \Leftrightarrow 4k^2 - 3k - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k_1 = -\frac{5}{4} \\ k_2 = 2 \end{array} \right.$$

+ Với $k = -\frac{5}{4}$ ta có $y = -\frac{5}{4}x$. Thay vào (1) thì được

$$3x^2 + 2x\left(-\frac{5}{4}x\right) + \left(-\frac{5}{4}x\right)^2 = 11 \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Suy ra (I) có các nghiệm $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$ và $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

+ Với k = 2 ta được phương trình $3x^2 + 2x(2x) + (2x)^2 = 11 \Leftrightarrow x = \pm$

Suy ra hệ (I) có các nghiệm (1; 2) và (–1; –2).

Tổng hợp các kết quả : Hệ (I) có 4 nghiệm $\left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right.$

(1; 2) và (–1; –2).

3.61. Giải hệ phương trình :

a) (I) $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y & (1) \\ y^3 = 3y + 8x & (2) \end{cases}$ **b)** (II) $\begin{cases} x^2 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$

Hướng dẫn

a) Hệ (I) không phải là hệ phương trình bậc hai hai ẩn nhưng cũng tương tự hệ bậc hai đối xứng loại II. Ta giải tương tự như cách giải phương trình bậc hai đối xứng loại II. Ta có :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x^3 - y^3 = 5(y - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ (x - y)(x^2 + y^2 + xy + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } (**) \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x^2 + y^2 + xy + 5 = 0 \end{cases}$$

Bởi vì $x^2 + y^2 + xy + 5 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 5 > 0 \ \forall x, y$ nên hệ (**) nghiệm thành thử

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = \sqrt{11} \\ y = \sqrt{11} \end{cases}, \begin{cases} x = -\sqrt{11} \\ y = -\sqrt{11} \end{cases}$$

b) $$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^2y^2(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \\ (x + y)x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Giải các hệ phương trình trong các bài từ 3.62 đến 3.68

62. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y = 0 \\ x + y + 8 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

63. a) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3 \\ 2x + xy + 2y = -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x - 1)(y - 1) = 18 \end{cases}$

64. a) $\begin{cases} x^2 = 3x - y \\ y^2 = 3y - x \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + xy + x = 20 \\ y^2 + xy + y = 10 \end{cases}$

65. a) $\begin{cases} 2x^2 + xy - 4xy = 3 \\ 2x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1 \\ 3x^2 - xy + 3y^2 = 13 \end{cases}$

66. a) $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x = 0 & (1) \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 & (2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x^2 + 4xy - 2x - y + 2 = 0 & (1) \\ 3x^2 + 6xy - x + 3y = 0 & (2) \end{cases}$

67. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13 \\ x + y - \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$

68. a) $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2. \end{cases}$

69. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

$$(I) \begin{cases} 3x + 5y = 13 & (1) \\ x^2 + 3y^2 = m & (2) \end{cases}$$

70. Cho hệ phương trình với tham số m

$$(I) \begin{cases} x + xy + y = 2m + 1 & (1) \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng, với mọi giá trị của m hệ (I) luôn có nghiệm.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

3.71. Giải các phương trình :

a) $x + \dfrac{2}{x-2} = \dfrac{2(x-1)}{x-2}$ **b)** $2x + \sqrt{x-3} = 8 - \sqrt{3-x}$.

3.72. Giải và biện luận phương trình :

a) $(m+1)^2x + 1 - m = (7m-5)x$ **b)** $\dfrac{x+m}{x+1} + \dfrac{x-2}{x} = 2$

c) $m^2(x-1) = 9x - 4m + 3$.

3.73. Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases} \dfrac{5}{x+3} - \dfrac{9}{y-2} = 100 \\ \dfrac{3}{x+3} + \dfrac{7}{y-2} = 308 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \dfrac{2(x-1)}{x+1} - \dfrac{y+3}{y-2} = 7 \\ \dfrac{3(x-1)}{x+1} + \dfrac{5(y+3)}{y-2} = -9 \end{cases}$

3.74. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình :

a) $\begin{cases} mx + y - 3 = 0 \\ 4x + my - 6 = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -4x + my = 1 + m \\ (m+6)x + 2y = 3 + m \end{cases}$

3.75. Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} (m-1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x; y)$ sao cho $x^2 +$ đạt giá trị nhỏ nhất.

3.76. Giải các phương trình :

a) $\dfrac{2x}{x+m} + \dfrac{x}{x-m} = \dfrac{m^2}{4x^2 - 4m^2}$ **b)** $\dfrac{2x}{x-m} + \dfrac{12x^2}{m^2 - x^2} = \dfrac{m-x}{m+x}$

c) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$ **d)** $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$.

3.77. Giải các phương trình :

a) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 7}{x^2 + 2x + 3} = x^2 + 2x + 4$

c) $x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 10$

d) $x^4 + 10x^3 + 26x^2 + 10x + 1 = 0$.

78. Tìm giá trị của tham số m và tìm nghiệm còn lại, biết một nghiệm ghi kèm theo

a) $(2m + 1)x^2 + 2(3m - 2)x + 2m - 10 = 0$ có nghiệm $x = -4$

b) $(m^2 - 3m + 2)x^2 + 3mx - (3m^2 + m - 4) = 0$ có nghiệm $x = 2$.

79. Giải và biện luận phương trình theo tham số m

a) $(m - 3)x^2 - 2mx + m - 6 = 0$ (1)

b) $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$ (2)

80. Cho phương trình $x^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ (1)

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m phương trình luôn có nghiệm.

b) Tìm một hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1, x_2 của phương trình không phụ thuộc m.

c) Tìm giá trị của m để biểu thức $A = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2$ có giá trị nhỏ nhất.

81. Tìm giá trị của m sao cho phương trình :

$$(m - 4)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$$

có hai nghiệm trái dấu và nghiệm âm có giá trị tuyệt đối lớn hơn.

82. Chứng tỏ rằng với mọi giá trị của tham số m, hệ phương trình

$$\begin{cases} x + xy + y = 2m + 1 \\ x^2y + xy^2 = m^2 + m \end{cases}$$ luôn có nghiệm.

Xác định giá trị của m để hệ phương trình đó có nghiệm duy nhất.

Chương IV

BẤT ĐẲNG THỨC - BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm bất đẳng thức

Một mệnh đề có một trong các dạng : "$A > B$", "$A < B$", "$A \geq B$", "A
trong đó A, B là các biểu thức chứa các số và các phép toán. Ta g
*là **vế trái**, B là **vế phải** của bất đẳng thức.*

2. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Tính chất 1 *(Tính chất bắc cầu)*

$$\begin{cases} A > B \\ B > C \end{cases} \Rightarrow \quad A > C$$

Tính chất 2 *(Liên hệ giữa thứ tự và phép cộng)*

$$A > B \quad \Rightarrow \quad A + C > B + C$$

Hệ quả *(Quy tắc chuyển vế)*

$$A > B + C \quad \Rightarrow \quad A - C > B$$

Tính chất 3 *(Liên hệ giữa thứ tự và phép nhân)*

$$\begin{cases} A > B \\ C > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad AC > BC$$

$$\begin{cases} A > B \\ C < 0 \end{cases} \Rightarrow \quad AC < BC$$

Tính chất 4 *(Quy tắc cộng hai bất đẳng thức cùng chiều)*

$$\begin{cases} A > B \\ C > D \end{cases} \Rightarrow \quad A + C > B + D$$

Tính chất 5 *(Quy tắc nhân)*

$$\begin{cases} A > B > 0 \\ C > D > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad A + C > BD$$

Hệ quả 1 *(quy tắc nghịch đảo)*

$$A > B > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A} < \frac{1}{B}$$

Hệ quả 2 *(quy tắc nâng lên lũy thừa và quy tắc khai căn)*

$$\begin{cases} A > B > 0 \\ n \text{ nguyên dương} \end{cases} \Rightarrow \quad A^n > B^n$$

$$\begin{cases} A > B > 0 \\ n \text{ nguyên dương} \end{cases} \Rightarrow \quad \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}.$$

3. Bất đẳng thức Côsi

a) *Với hai số không âm a, b thì :* $\sqrt{a.b} \le \dfrac{a+b}{2}$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi a = b.

***Hệ quả*.**

- *Nếu a, b ≥ 0   a + b = hằng số. Tích ab lớn nhất khi a = b.*
- *Nếu a, b ≥ 0   ab = hằng số. Tổng a + b nhỏ nhất khi a = b.*

b) *Với n số không âm* $a_1, a_2, \ldots, a_n \ge 0$, $n \in N$, $n \ge 2$.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

4. Bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối

$$|a + b| \le |a| + |b| \quad \forall a, b \in R$$

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \le |a - b| \quad \forall a, b \in R$$

Dấu "=" xảy ra chỉ khi ab ≥ 0.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

4.1. Chứng minh : **a)** $a^2 + b^2 + 1 \ge a + b + ab \quad \forall a, b \in R$ (1)

b) $\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^3+b^3}{2} \le \dfrac{a^4+b^4}{2} \quad \forall a, b \in R$ (2)

Hướng dẫn

a) (1) ⇔ $$\frac{a^2}{2} - a + \frac{1}{2} + \frac{b^2}{2} - b + \frac{1}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} - ab \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{b^2}{2} - 2.\frac{b}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab) \ge 0$$

⇔ $2\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\ge 0$ đúng vì mỗi hạng tử v

trái không âm.

b) (2) ⇔ $(a+b)(a^3+b^3)\le 2(a^4+b^4)$

⇔ $a^4+ba^3+ab^3+b^4\le 2(a^4+b^4)$

⇔ $0\le (a^4-a^3b)+(b^4-ab^3)$

⇔ $0\le a^3(a-b)-b^3(a-b)=(a^3-b^3)(a-b)$

⇔ $0\le (a-b)^2(a^2+ab+b^2)$ đúng.

Vì $(a-b)^2\ge 0\ \forall a,b\in R$, $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4}\ge 0\ \forall a,b\in R$

4.2. Chứng minh :

a) $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)\quad \forall a,b,c\in R$ (1

b) $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(ab^2-a+c+1)\quad \forall a,b,c\in R$ (2

Hướng dẫn

a) (1) ⇔ $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-b^2ac-c^2ab-a^2bc\ge 0$

⇔ $\frac{1}{2}(a^2b^2-2b^2ac+b^2c^2)+\frac{1}{2}(b^2c^2-2c^2ab+c^2a^2)+$

$+\frac{1}{2}(c^2a^2-2a^2bc+a^2b^2)\ge 0$

⇔ $\frac{1}{2}b^2(a-c)^2+\frac{1}{2}c^2(b-a)^2+\frac{1}{2}a^2(c-b)^2\ge 0$ đúng.

b) (2) ⇔ $(a^4+b^4-2a^2b^2)+(a^2-2a+1)+(a^2-2ac+c^2)\ge 0$

⇔ $(a^2-b^2)^2+(a-1)^2+(a-c)^2\ge 0$ đúng.

4.3. Chứng minh với các số thực a, b, c, d tùy ý ta có :

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$ (1

Hướng dẫn

(1) ⇔ $\left[\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right]^2\ge (a+c)^2+(b+d)^2$

⇔ $a^2+b^2+c^2+d^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge a^2+b^2+c^2+d^2+$

$+\ 2ac+2b$

⇔ $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\ge ac+bd$ (2

Nếu ac + bd ≤ 0, (2) hiển nhiên đúng, do đó (1) đúng.

Nếu ac + bd > 0, ta có :

$(2) \Leftrightarrow \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2d^2 + b^2c^2 - 2ac.bd \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad (ad - bc)^2 \geq 0$ đúng. Vậy (1) đúng.

Ý nghĩa hình học :

Đặt $\vec{u} = (a; b)$, $\vec{v} = (c; d)$ thì $\vec{u} + \vec{v} = (a + c; b + d)$.

Bất đẳng thức (1) có ý nghĩa hình học là : $|\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}|$.

4.4. Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh :

a) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a + b}$ (1) **b)** $(a^3 + b^3)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq (a + b)^2$ (2

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow \quad \dfrac{a + b}{ab} \geq \dfrac{4}{a + b}$

Do a > 0, b > 0 nên (a + b)ab > 0. Nhân hai vế với (a + b)ab, ta được :

$(1) \Leftrightarrow \quad (a + b)^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 \geq 0$ đúng.

b) Do a > 0, b > 0 nên $\dfrac{ab}{a + b} > 0$. Nhân hai vế (2) với $\dfrac{ab}{a + b}$, được :

$(2) \Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \quad \Leftrightarrow \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq ab(a + b)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - ab + b^2 \geq ab \quad \Leftrightarrow \quad (a - b)^2 \geq 0$ Đúng.

4.5. Cho a, b, c > 0. Chứng minh :

a) $(a + b + c)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9$ (1) **b)** $\dfrac{a}{b + c} + \dfrac{b}{c + a} + \dfrac{c}{a + b} \geq \dfrac{3}{2}$ (2

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow \quad 3 + \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} \geq 9$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^3 - 2ab}{ab} + \frac{a^2 + c^2 - 2ac}{ac} + \frac{b^2 + c^2 - 2bc}{bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(a-c)^2}{ac} + \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 0 \quad \text{Đúng.}$$

Ghi chú : (1) được tổng quát như sau :

Với n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \in N^*$ thì

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

b) *Cách thứ nhất :*

$$(2) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geq 3 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad [(b+c) + (c+a) + (a+b)]\left[\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right] \geq 9$$

Bất đẳng thức cuối đúng theo như chứng minh câu a).

Cách thứ hai :

Đặt $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$ thì $a + b + c = \frac{1}{2}(x + y + z)$

$$a = \frac{x+z-y}{2}, \quad b = \frac{x+y-z}{2}, \quad c = \frac{y+z-x}{2}$$

Bất đẳng thức (2) trở thành :

$$\frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} + \frac{y+z-x}{2x} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x+z}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) + \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} - 2\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 2\right) \geq 0 \quad \text{Đúng.}$$

4.6. Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh :

a) $a^2 + ab + b^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$ (1)

b) $\sqrt{a^2 + ab + b^2} + \sqrt{b^2 + bc + c^2} + \sqrt{c^2 + ca + a^2} \geq \sqrt{3}\,(a + b + c)$ (2)

Hướng dẫn

a) Ta có : $(a-b)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3(a+b)^2 + (a-b)^2 \geq 3(a+b)^2$

$\Leftrightarrow \quad 4(a^2 + ab + b^2) \geq 3(a+b)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (1)$

b) Áp dụng kết quả câu a).

4.7. *Bất đẳng thức Côsi-Svac (*)*

Chứng minh, với các số thực a, b, c, d bất kì ta có bất đẳng thức Côs Svac sau :

$$(ab + cd)^2 \leq (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \qquad (1$$

Dấu = xảy ra khi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hay $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. (Quy ước các tỉ số nếu mẫu bằng thì tử bằng 0).

Hướng dẫn

$(1) \Leftrightarrow \quad a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd \leq a^2b^2 + c^2d^2 + a^2d^2 + c^2b^2$

$\Leftrightarrow \quad -(ad - bc)^2 \leq 0$ Đúng.

Dấu = xảy ra khi $ad - bc = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Ghi chú : Một số tài liệu gọi tên bất đẳng thức trên là bất đẳng thư Bunhiacôpski.

Bất đẳng thức Côsi-Svac cho 2n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ c dạng sau :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$$

Dấu = xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Ý nghĩa hình học

Gọi $\vec{u} = (a; c)$, $\vec{v} = (b; d)$. Bất đẳng thức (1) tương đương với bất đẳn thức hình học sau : $\vec{u}.\vec{v} \leq |\vec{u}|.|\vec{v}|$.

4.8. *Bất đẳng thức Trêbưsép*

Cho các số thực a, b, c, d. Chứng minh :

a) Nếu $a \geq b$ và $c \geq d$ hoặc $a \leq b$ và $c \leq d$ thì

$$\frac{ac + bd}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+d}{2}\right) \qquad (1$$

b) Nếu $a \ge b$ và $c \le d$ hoặc $a \le b$ và $c \ge d$ thì

$$\frac{ac+bd}{2} \le \left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\frac{c+d}{2}\right) \qquad (2)$$

Hai bất đẳng thức (1) và (2) mang tên nhà toán học người Nga Trêbưsép.

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow \quad \dfrac{ac+bd}{2} - \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{c+d}{2}\right) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(a-b)(c-d)}{4} \ge 0$ đúng.

b) Chứng minh tương tự câu a).

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG CÁCH ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI VÀ CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN KHÁC

.9. Chứng minh :

a) $\left|\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right| \ge 2 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R} : ab > 0 \qquad (1)$

b) $\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \ge a + b + c \qquad \forall a, b, c > 0 \qquad (2)$

Hướng dẫn

a) Vì $\dfrac{a}{b}$ và $\dfrac{b}{a}$ cùng dấu nên có vế trái (1) :

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \ge 2\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right|\cdot\left|\frac{b}{a}\right|} = 2 \qquad \text{Đpcm.}$$

b) $\text{VT (2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ca}{b} + \dfrac{ab}{c}\right)$

$$\ge \sqrt{\frac{ab}{c}\cdot\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{ca}{b}\cdot\frac{ab}{c}} = b + c + a.$$

.10. Chứng minh : $\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} \ge 6 \qquad \forall a, b, c > 0 \qquad (1)$

Hướng dẫn

$$(1) \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{b+c}{a}\right) + \left(1 + \frac{c+a}{b}\right) + \left(1 + \frac{a+b}{c}\right) \ge 9 \qquad (2)$$

$$VT\,(2) = (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương :

$$a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}\,, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad VT\,(2) \geq 3\sqrt[3]{abc}\,.\,3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} = 9.$$

4.11. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a > c > 0$, $b > c > 0$. Chứng minh :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab} \qquad ($$

Hướng dẫn

Cách 1.

$$(1) \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{c(a-c)}{ab}} + \sqrt{\frac{c(b-c)}{ab}} \leq 1 \qquad ($$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho các hạng tử vế trái (2) :

$$\sqrt{\frac{c(a-c)}{ba}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{b}+\frac{a-c}{a}\right]$$

$$\sqrt{\frac{c(b-a)}{ab}} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{c}{a}+\frac{b-c}{b}\right]$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta được (2).

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi-Svac, ta được :

$$VT\,(1) = \sqrt{c}.\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}.\sqrt{c}$$

$$\leq \sqrt{(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2}\,.\sqrt{(\sqrt{b-c})^2 + (\sqrt{c})^2} = \sqrt{ab}\,.$$

Cách 3. Biến đổi tương đương

$$(1) \Leftrightarrow \quad c(a-c) + c(b-c) + 2c\sqrt{a-c}\sqrt{b-c} \leq ab$$

$$\Leftrightarrow \quad 2c\sqrt{(a-c)(b-c)} \leq ab + 2c^2 - ac - bc$$

$$\Leftrightarrow \quad 4c^2(a-c)(b-c) \leq [ab + 2c^2 - ac - bc]^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq (ab - ac - bc)^2.$$

4.12. Gọi a, b, c là các cạnh của tam giác ABC với $a + b + c = 2p$.

Chứng minh : $\sqrt{p} < \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c} \leq \sqrt{3p}$.

Hướng dẫn

Cách 1.

$$(\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c})^2 = p-a+p-b+p-c+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}+$$

$$+2\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-c}$$

$$= p+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}+2\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-c}$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có :

$$2\sqrt{p-a}\sqrt{p-b}+2\sqrt{p-b}\sqrt{p-c}+2\sqrt{p-a}\sqrt{p-c} \le$$

$$\le (p-a)+(p-b)+(p-b)+(p-c)+(p-a)+(p-c)=2p.$$

Do đó ta có : $p < [\sqrt{p-a}+\sqrt{p-b}+\sqrt{p-c}]^2 \le 3p \Rightarrow$ Đpcm.

Cách 2. Áp dụng bất đẳng thức Côsi-Svac ta có :

$$(1.\sqrt{p-a}+1.\sqrt{p-b}+1.\sqrt{p-c})^2 \le (1^2+1^2+1^2)(p-a+p-b+p-c)=3p.$$

$\Rightarrow$ Đpcm.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

4.13. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \ge n^2 \qquad (1)$$

với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực dương tùy ý.

Hướng dẫn

Bất đẳng thức (1) có thể chứng minh nhờ bất đẳng thức Côsi

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \ge n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \ge n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\ldots\frac{1}{a_n}},$$

Nhân vế với vế ta suy ra (1).

Dưới đây ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp (Xem §1 chương I).

Với n = 1, dễ thấy (1) đúng.

Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là ta có :

$$(a_1+a_2+\ldots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}\right) \ge k^2$$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1. Thật vậy :

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) +$$

$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\frac{1}{a_{k+1}} + 1$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \left(\frac{a_{k+1}}{a_1} + \frac{a_1}{a_{k+1}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a_{k+1}}{a_2} + \frac{a_2}{a_{k+1}}\right) + \ldots + \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) + 1 \geq k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với mọi n.

4.14. *Bất đẳng thức Becnuli*

Chứng minh bất đẳng thức mang tên nhà toán học Thụy Sĩ Becnuli

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad \forall a \in \mathbb{R},\ a \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (1)$$

Hướng dẫn

+ Với n = 1 thì (1) đúng.
+ Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là giả sử ta có : $(1 + a)^k \geq 1 + ka$

Ta chứng minh (1) đúng với n = k + 1. Thật vậy

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)(1 + a)^k \geq (1 + a)(1 + ka) \geq 1 + (k + 1)a$$

Vậy bất đẳng thức (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

4.15. Chứng minh trong các bất đẳng thức dưới đây có ít nhất một bất đẳng thức đúng

$$2(a^2 + b^2) \geq (b + c)^2,\quad 2(b^2 + c^2) \geq (c + a)^2,\quad 2(c^2 + a^2) \geq (a + b)^2.$$

Hướng dẫn

Giả sử cả 3 bất đẳng thức đều sai tức là ta có 3 bất đẳng thức đúng sau :

$$2(a^2 + b^2) < (b + c)^2,\qquad 2(b^2 + c^2) < (c + a)^2,\qquad 2(c^2 + a^2) < (a + b)^2$$

$\Rightarrow \quad 2(a^2 + b^2) + 2(b^2 + c^2) + 2(c^2 + a^2) < (b + c)^2 + (c + a)^2 + (a + b)^2$

$\Rightarrow \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) < 2(ab + bc + ca)$

$\Rightarrow \quad (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) < 0$

$\Rightarrow \quad (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 < 0$. Vô lí.

4.16. Cho a, b, c ∈ (0; 1). Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau đây là sai.

$$a(1 - b) > \frac{1}{4}, \qquad b(1 - c) > \frac{1}{4}, \qquad c(1 - a) > \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn

Giả sử cả ba bất đẳng thức trên đều đúng. Khi đó ta có :

$$a(1 - b).b(1 - c).c(1 - a) > \frac{1}{64} \qquad (*)$$

Nhưng theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$a + (1 - a) = 1 \quad \Rightarrow \quad a(1 - a) \le \frac{1}{4}.$$

Tương tự $\quad b(1 - b) \le \dfrac{1}{4}$

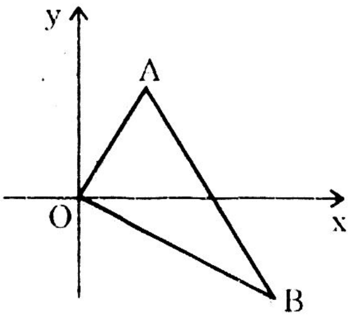
$$c(1 - c) \le \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a(1 - a)b(1 - b)c(1 - c) \le \frac{1}{64} \qquad (**).$$

Các bất đẳng thức (*) và (**) là mâu thuẫn. Vậy trong 3 bất đẳng thức đã cho có ít nhất một bất đẳng thức sai.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

4.17. Chứng minh : $\sqrt{(a + c)^2 + b^2} + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \ge 2\sqrt{a^2 + b^2} \quad \forall a, b, c \in R$

Hướng dẫn



Trong mặt phẳng tọa độ, lấy các điểm

A(a + c; b), B(c – a; –b) ta có :

$OA = \sqrt{(a + c)^2 + b^2}, \qquad OB = \sqrt{(c - a)^2 + (-b)^2}$

$AB = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$

Trong tam giác OAB ta có : OA + OB ≥ AB, tức là ta có đpcm.

(Dấu = xảy ra khi $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ đối nhau).

4.18. Chứng minh : $\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq \sqrt{y^2 + yz + z^2}$ $\forall x, y, z \in R$.

Hướng dẫn

Trong mặt phẳng tọa độ ta lấy các điểm :

$A\left(x + \frac{y}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$, $B\left(x + \frac{z}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$ khi đó ta có :

$$OA = \sqrt{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$$

$$OB = \sqrt{\left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)^2} = \sqrt{x^2 + xz + z^2}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{z}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}z + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2} = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$$

Từ tính chất hình học OA + OB ≥ AB. Suy ra đpcm.

DÙNG BẤT ĐẲNG THỨC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT

4.19. Cho biểu thức $P(x, y) = x^2y^2 + x^2 - 2xy - 4x + 1$ với $x, y \in R$.

Với giá trị nào của x và y thì P(x, y) có giá trị nhỏ nhất. Xác định giá trị nhỏ nhất của P(x, y).

Hướng dẫn

$$P(x, y) = (x^2y^2 - 2xy + 1) + (x^2 - 4x + 4) - 4$$
$$= (xy - 1)^2 + (x - 2)^2 - 4 \geq -4 \qquad \forall x, y \in R$$

P(x, y) đạt giá trị nhỏ nhất bằng −4 khi $xy - 1 = 0$ và $x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2, \quad y = \frac{1}{2}.$$

4.20. Cho biểu thức $A(x, y) = (x + 1)(4y + 3)$ với $x, y \in R$, $x, y > 0$ và $xy = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của A(x, y).

Hướng dẫn

$$A(x, y) = 3x + 4y + 4xy + 3 = 3x + 4y + 19$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho $3x > 0$, $4y > 0$. ta được :

$$3x + 4y \geq 2\sqrt{3x.4y} = 8\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad A(x, y) \geq 19 + 8\sqrt{3} \quad \forall x, y \geq 0$$

Vì tích 3x.4y = 48 không đổi nên tổng 3x + 4y nhỏ nhất.

khi $3x = 4y \quad \Leftrightarrow \quad x.\frac{3}{4}x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ (do điều kiện x > 0)

Vậy MinA = $19 + 8\sqrt{3}$ đạt được khi $x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $y = \sqrt{3}$.

4.21. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$y = f(x) = (2x - 1)(3 - 5x) \quad \text{với } x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right].$$

Hướng dẫn

Ta có : $f(x) = (2x - 1)(5 - 3x) = \frac{2}{5}\left(5x - \frac{5}{2}\right)(5 - 5x)$

Theo bất đẳng thức $\quad ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2 \quad \forall a, b \in R$

ta có $\quad f(x) \leq \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\left[\left(5x - \frac{5}{2}\right) + (5 - 5x)\right] = \frac{1}{40}.$

Vì $ab = \frac{1}{4}(a + b)^2$ chỉ xảy ra khi a = b. Suy ra Max $f(x) = \frac{1}{40}$ đạt đượ

khi $5x - \frac{5}{2} = 3 - 5x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{11}{20}.$

Ghi chú : Ta cũng có thể biến đổi :

$$f(x) = (2x - 1)(3 - 5x) = -10x^2 + 11x - 3$$

$$= -10\left(x - \frac{11}{20}\right)^2 + \frac{1}{40} \leq \frac{1}{40} \quad \forall x.$$

4.22. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P(x, y) = \frac{\sqrt{x - 5}}{x} + \frac{\sqrt{y - 1}}{y} \quad \text{với} \quad x \geq 5, y \geq 1.$$

Hướng dẫn

$$P(x, y) = \frac{2\sqrt{5}\sqrt{x - 5}}{2\sqrt{5}x} + \frac{2\sqrt{y - 1}}{2y}$$

Theo bất đẳng thức Côsi cho 2 số không âm ta có :

$$2\sqrt{5}\sqrt{x-5} \le [(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{x-5})^2] = x$$

$$2\sqrt{y-1} = 2\sqrt{1}\sqrt{y-1} \le [1 + y - 1] = y$$

Do đó : $P(x, y) \le \dfrac{x}{2\sqrt{5}x} + \dfrac{y}{2y} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} \quad \forall x, y \ x \ge 5, y \ge 1$

Max $P(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2}$ đạt được khi $\sqrt{5} = \sqrt{x-5}$

$\sqrt{-1} = \sqrt{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad x = 10, \ \ y = 2.$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

Chứng minh bằng biến đổi tương đương (các bài từ 4.23 đến 4.28)

4.23. **a)** $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \ge 2(a + b + c) \quad \forall a, b, c \in R.$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \ge a(b + c + d + e) \quad \forall a, b, c, d, e \in R.$

4.24. **a)** $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \ge 6abc \quad \forall a, b, c \in R.$

b) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca \quad \forall a, b, c \in R.$

4.25. Cho $a, b \in R \quad a + b \ge 0$. Chứng minh :

a) $a^3 + b^3 \ge a^2b + ab^2.$ **b)** $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt[3]{\dfrac{a^3 + b^3}{2}}.$

4.26. **a)** $(a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) \quad \forall a, b, c \in R.$

b) $\dfrac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \ge ab - ac + 2bc \quad \forall a, b, c \in R.$

4.27. **a)** $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} + 4 \ge 3\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right) \quad \forall a, b \in R, \ \ ab \ne 0.$

b) $\dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^2 + b^2}{2} \cdot \dfrac{a^3 + b^3}{2} \le \dfrac{a^6 + b^6}{2} \quad \forall a, b \in R.$

4.28. **a)** $b < \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < a \quad \forall a > b > 0.$

b) $\dfrac{1}{1 + a^2} + \dfrac{1}{1 + b^2} \ge \dfrac{2}{1 + ab} \quad \forall a, b \in R, \ \ a \ge b \ge 1.$

Chứng minh bằng cách dùng bất đẳng thức Côsi và các bất đẳng thú cổ điển khác (từ bài 4.29 đến 4.35).

4.29. **a)** $\dfrac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} \geq 2 \quad \forall a \in R.$

b) $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)\left(1 + \dfrac{b}{c}\right)\left(1 + \dfrac{c}{a}\right) \geq 8 \quad \forall a, b, c > 0.$

4.30. **a)** $(1 + a + b)(a + b + ab) \geq 9ab \quad \forall a, b \geq 0.$

b) $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2 \quad \forall a, b \geq 0.$

4.31. **a)** $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c) \quad \forall a, b, c \in R.$

b) $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^m + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m \geq 2^{m+1}, \quad m \in N^*, \ a, b > 0.$

4.32. Cho a, b, c, d > 0 thỏa mãn $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} + \dfrac{1}{1+d} \geq 3$.

Chứng minh $\dfrac{1}{81} \geq abcd.$

4.33. Cho a, b, c là các cạnh của tam giác ABC với a + b + c = 2p.

Chứng minh : **a)** $(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c) \leq abc.$

b) $\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \geq 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right).$

4.34. Cho a, b, c > 0, a + b + c = 1. Chứng minh :

a) $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$.   **b)** $\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{c+a} + \dfrac{1}{a+b} \geq \dfrac{9}{2}.$

4.35. **a)** $\dfrac{a^2}{b+c} + \dfrac{b^2}{c+a} + \dfrac{c^2}{a+b} \geq \dfrac{a+b+c}{2} \quad \forall a, b, c > 0.$

b) $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} + \dfrac{c^2}{a^2} \geq \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \quad \forall a, b, c > 0.$

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp và bằng phản chứng trong cá bài 4.36 và 4.37.

4.36. **a)** $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n + b^n}{2} \quad \forall a, b \geq 0, \quad n \in N^*.$

b) $(1 + x)^n \geq 1 + \dfrac{n^2}{4}$ với $x \geq 1, \quad n \in N^*.$

4.37. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} a + b + c > 0 \\ ab + bc + ca > 0 \\ abc > 0 \end{cases}$$

Chứng minh a, b, c là các số dương.

4.38. Cho $x > 0$, $y > 0$ và $xy = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$.

4.39. Tìm giá trị nhỏ nhất của

a) $f(x) = (x + 1)\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)$ với $x > 0$.

b) $g(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$ với $x > 0$.

4.40. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

a) $f(x) = x^3(2 - x)^5$ với $x \in [0; 2]$.

b) $g(x) = \sqrt{2 + x} + \sqrt{5 - x}$ với $x \in [-2; 5]$.

4.41. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $A = \dfrac{\sqrt{x - 2}}{x} + \dfrac{\sqrt{y - 5}}{y}$ với $x \geq 2,\ y \geq 5$.

b) $B = (x - x^2)(y - 3y^2)$ với $x \in [0; 1],\ y \in \left[0; \dfrac{1}{3}\right]$.

4.42. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = 4x^2 + y^2$ với x, y là các số thực thỏa mãn hệ thức $3x - 5y = 7$.

4.43. Chứng minh :

a) $|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \quad \forall a, b, c \in R.$

b) $|a| - |b| \leq |a + b| \quad \forall a, b \in R.$

c) $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in R.$

4.44. Chứng minh : $\dfrac{|a| + |b|}{1 + |a| + |b|} \geq \dfrac{|a + b|}{1 + |a + b|} \quad \forall a, b \in R.$

4.45. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = |x - 1975| + |x - 2005|.$$

§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm bất phương trình một ẩn

Bất phương trình một ẩn là một mệnh đề chứa biến có một trong cá dạng : "$f(x) < g(x)$", "$f(x) > g(x)$", "$f(x) \leq g(x)$", "$f(x) \geq g(x)$", trong đó $f(x$ $g(x)$ là các biểu thức cùng chứa một biến x.

***Điều kiện** của bất phương trình $f(x) > g(x)$ là điều kiện của ẩn số x đ các biểu thức $f(x)$, $g(x)$ cùng có nghĩa.*

*Số x_0 thỏa mãn điều kiện của bất phương trình sao cho mệnh đ "$f(x_0) > g(x_0)$" đúng thì x_0 **là một nghiệm** của bất phương trình "$f(x) > g(x)$".*

2. Bất phương trình tương đương

*Hai bất phương trình $f_1(x) < g_1(x)$ và $f_2(x) < g_2(x)$ là **tương đương**, kí hiệu*

$$f_1(x) < g_1(x) \quad \Leftrightarrow \quad f_2(x) < g_2(x),$$

nếu chúng có cùng tập nghiệm (hay cùng vô nghiệm).

***Định lí :** Nếu $h(x)$ là biểu thức xác định với mọi x thỏa mãn điề kiện D của bất phương trình $f(x) > g(x)$ thì :*

***a)** $f(x) + h(x) > g(x) + h(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$.*

***b)** Nếu $h(x) > 0$ với mọi x thỏa mãn D thì*

$$h(x)f(x) > h(x)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x)$$

Nếu $h(x) < 0$ với mọi x thỏa mãn D thì

$$h(x)f(x) > h(x)g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) < g(x).$$

3. Bất phương trình bậc nhất một ẩn

***a)** Bất phương trình bậc nhất với ẩn x là bất phương trình có dạng*

$$ax + b > 0 \quad \text{hoặc} \quad ax + b < 0 \quad \text{hoặc} \quad ax + b \geq 0 \quad \text{hoặc} \quad ax + b \leq 0$$

trong đó a, b là các số đã biết, với $a \neq 0$, x là biến số.

***b)** Giải và biện luận bất phương trình $ax + b > 0$* (1

+ *Nếu $a > 0$, tập nghiệm của (1) là : $x > -\frac{b}{a}$, tức là khoảng $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right.$*

+ *Nếu $a < 0$, tập nghiệm của (1) là : $x < -\frac{b}{a}$, tức là khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right.$*

+ *Nếu $a = 0$, bất phương trình (1) vô nghiệm.*

Các bất phương trình $ax + b < 0$, $ax + b \geq 0$, $ax + b \leq 0$ được biện luận tương tự.

4. Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn

Hệ bất phương trình với cùng một ẩn mà mỗi bất phương trình đều là bậc nhất thì gọi là hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Ví dụ
$$\begin{cases} a_1x + b_1 > 0 \\ a_2x + b_2 > 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_kx + b_k > 0 \end{cases}$$

Tập nghiệm của hệ bất phương trình là giao của các tập nghiệm của các bất phương trình của hệ.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

4.46. Tìm điều kiện xác định của bất phương trình rồi suy ra tập nghiệm của nó.

a). $2x + \sqrt{x-3} \leq 9 + \sqrt{1 - \frac{x}{3}}$. **b)** $3 + \sqrt{4-2x} > \sqrt{4-2x}$.

Hướng dẫn

a) Điều kiện xác định của $\sqrt{x-3}$ là $x \geq 3$.

ĐKXĐ của $\sqrt{1 - \frac{x}{3}}$ là : $1 - \frac{x}{3} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.

Suy ra ĐKXĐ của bất phương trình là : $x = 3$. Giá trị $x = 3$ nghiệm đúng bất phương trình. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $x = 3$.

b) ĐKXĐ : $4 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Mọi $x \leq 2$ đều là nghiệm của bất phương trình vì giá trị VT luôn lớn hơn giá trị VP.

4.47. Xét sự tương đương của các cặp bất phương trình :

a) $\sqrt{x-1} > 3$ và $\sqrt{x-1} + \frac{1}{1+x^2} > 3 + \frac{1}{1+x^2}$.

b) $\sqrt{3-x} < 2$ và $\sqrt{3-x} + \frac{1}{x+1} < 2 + \frac{1}{x+1}$.

c) $|2x - 5| > \sqrt{x}$ và $(2x-5)^2 > x$.

Hướng dẫn

a) Tương đương. Vì với ĐKXĐ của bất phương trình thứ nhất biểu thức $\dfrac{1}{1+x^2}$ luôn có giá trị khác 0.

b) Không tương đương. Vì với ĐKXĐ của bất phương trình thứ nhất tại giá trị $x = -1$ bất phương trình thứ hai không xác định.

c) Không tương đương. Vì mọi giá trị $x < 0$ là nghiệm của bất phương trình thứ hai nhưng không phải là nghiệm của bất phương trình thứ nhất.

4.48. Giải bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

a) $2x - 1 + \dfrac{x+1}{3} > \dfrac{x-3}{2}$ (1)

b) $(2x + 3)^2 - x^2 + 3 \le 3x^2 - 2x$ (2)

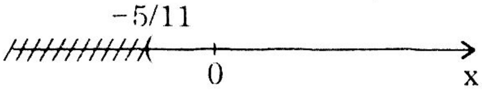
Hướng dẫn

a) Nhân hai vế với 6 ta được :

$(1) \Leftrightarrow \quad 6(2x - 1) + 2(x + 1) > 3(x - 3)$

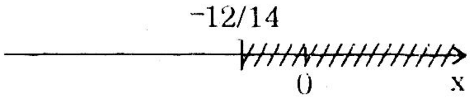
$\Leftrightarrow \quad 14x - 4 > 3x - 9$

$\Leftrightarrow \quad 11x > -5 \quad \Leftrightarrow \quad x > \dfrac{-5}{11}$



b) $(2) \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 3 \le 3x^2 - 2x$

$\Leftrightarrow \quad 14x \le -12 \quad \Leftrightarrow \quad x \le \dfrac{-12}{14}.$



4.49. Giải hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số.

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 3x - 5 < \dfrac{x+1}{3} & (1) \\ \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{3x-2}{2} \ge \dfrac{4x}{5} & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn

$(1) \Leftrightarrow \quad 3(3x - 5) < x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 8x < 16 \quad \Leftrightarrow \quad x < 2$

Tập nghiệm của bất phương trình (1) của hệ (I) là $(-\infty; 2)$.

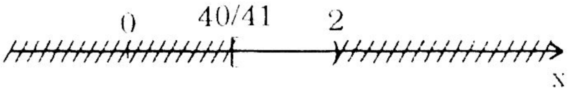
$(2) \Leftrightarrow \quad 10(2x - 1) + 15(3x - 2) \ge 24x$

$\Leftrightarrow \quad 41x \ge 40 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge \dfrac{40}{41}$

Tập nghiệm của bất phương trình (2) của hệ (I) là $\left[\dfrac{40}{41}; +\infty\right)$

Tập nghiệm của hệ (I) là giao của các tập nghiệm của các bất phương trình (1) và (2) :

$$T = (-\infty; 2) \cap \left[\dfrac{40}{41}; +\infty\right) = \left[\dfrac{40}{41}; 2\right)$$



Trên trục số tập nghiệm là nửa khoảng không bị gạch sọc.

4.50. Giải, biện luận theo tham số m bất phương trình

a) $m(x - m) \le x - 1$ (1) **b)** $(m + 1)x - m > 3x + 4$ (2)

Hướng dẫn

a) (1) ⇔ $(m - 1)x \le m^2 - 1$

Nếu $m - 1 < 0$, tức $m < 1$ nghiệm của (1) : $x \ge \dfrac{m^2 - 1}{m - 1} \Leftrightarrow x \ge m + 1$

Nếu $m - 1 > 0$, tức với $m > 1$, (1) có nghiệm là $x \le m + 1$

Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (1) trở thành $0x \le 0$, mọi $x \in R$ đều là nghiệm của (1).

b) (2) ⇔ $(m - 2)x > m + 4$

Nếu $m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 2$ thì (2) $\Leftrightarrow x < \dfrac{m + 4}{m - 2}$

Nếu $m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì (2) $\Leftrightarrow x > \dfrac{m + 4}{m - 2}$

Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì (2) trở thành $0x > 6$. Vô nghiệm.

4.51. Cho hệ bất phương trình chứa tham số m

$$(I)\begin{cases} mx + 2 \ge 3x + 10 & (1) \\ 2x + 3 < \dfrac{3}{2}x + 5 & (2) \end{cases}$$

Với giá trị nào của m thì hệ bất phương trình có nghiệm ?

Hướng dẫn

(2) ⇔ $x < 4$

(1) ⇔ $(m - 3)x \ge 8$

+ Nếu $m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) $\Leftrightarrow x \ge \dfrac{8}{m - 3}$

Hệ (I) có nghiệm nếu $(-\infty; 4) \cap \left[\frac{8}{m-3}; +\infty\right) \neq \varnothing$. Điều này có đượ

nếu $\frac{8}{m-3} < 4 \quad \Leftrightarrow \quad m > 5.$

+ Nếu $m - 3 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 3$ thì (1) $\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{8}{m-3}$

Hệ (I) có nghiệm nếu $(-\infty; 4) \cap \left(-\infty; \frac{8}{m-3}\right] \neq \varnothing$

Điều này luôn luôn xảy ra với mọi $m < 3$.

+ Nếu $m - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 3$, thì (1) nghiệm đúng với mọi x.

Do đó hệ (I) luôn có nghiệm.

Kết luận : Hệ (I) có nghiệm với $m \leq 3$ hoặc $m > 5$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

4.52. Tìm điều kiện xác định của các bất phương trình :

a) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^3+1} < \frac{1}{x-2}$. **b)** $\frac{x+3}{x^2+5x+6} \geq \frac{\sqrt{x+4}}{x^2+1}$.

4.53. Tìm điều kiện xác định rồi suy ra tập nghiệm của mỗi bất phương trìn

a) $\sqrt{5-2x} + 1 > \sqrt{2x-5}$. **b)** $\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} > \frac{2}{\sqrt{x-2}}$.

c) $\sqrt{5-4x+x^2} + \sqrt{x^2-2x+2} < 2$.

4.54. Xét xem mỗi cặp bất phương trình dưới đây, cặp nào tương đương

a) $2x - 1 > \frac{x}{3} + 1$ và $2x - 2 + \frac{1}{x-2} > \frac{x}{3} + \frac{1}{x-2}$.

b) $x^2 + 6 < 7x$ và $\frac{x^2+6}{x^2-x+1} < \frac{7x}{x^2-x+1}$.

4.55. Giải và biểu diễn tập nghiệm trên trục số các bất phương trình

a) $5x + 3 \geq 6x + 5$. **b)** $2x - 1 < 3x + 4$.

c) $\frac{3x-2}{3} - 1 > \frac{x+3}{2}$. **d)** $x + \frac{x+2}{3} - \frac{x+3}{4} \leq 2$.

4.56. Với giá trị nào của m các bất phương trình sau đây là tương đương :

$$\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{6} > 2 \qquad (1$$

$$m(2x-1) > 3x + 5 \qquad (2$$

4.57. Giải hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

$$(\mathrm{I})\begin{cases} 5 + x < 2(1 - x) & (1) \\ \dfrac{x-4}{2} + \dfrac{x+2}{3} \geq \dfrac{x}{6} - 3 & (2) \end{cases}$$

4.58. Giải và biện luận theo tham số m các bất phương trình

a) $mx - 2 > x - 3m$.

b) $mx + \dfrac{x-1}{m} > \dfrac{x+1}{m} - 2x$.

4.49. Với giá trị nào của tham số m hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} + 1 > \dfrac{3x+2}{4} & (1) \\ mx - 2 > x + 3m & (2) \end{cases}$$

§3. Dấu của nhị thức

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nhị thức bậc nhất

Nhị thức bậc nhất (một ẩn) là biểu thức có dạng $f(x) = ax + b$, *trong đó x là biến số, a, b là cá* [illegible] $a \neq 0$.

Ta gọi x_0 *là nghiệm của nhị thức, là giá trị của biến tại đó nhị thức c giá trị bằng 0. Ta có :* $x_0 = -\dfrac{b}{a}$ *thì* $f(x_0) = 0$.

2. Định lí về dấu của nhị thức

Giá trị của nhị thức $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ *có dấu trái với dấu của hệ s a nếu biến x lấy giá trị trong khoảng* $\left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$ *và có dấu cùng v dấu của a nếu x lấy giá trị trong khoảng* $\left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$.

Nội dung của định lí thể hiện trong bảng xét dấu của $f(x) = ax + b$ *dư đây :*

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x) = ax + b$		*trái dấu a*	0	*cùng dấu a*	

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

4.60. Xét dấu của các biểu thức :

a) $(x-2)(3x+4)$. **b)** $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{2x-1}$.

Hướng dẫn

a) Ta xét dấu từng nhân tử và của tích các nhân tử rồi theo qui tắc về dấu của phép nhân các số nguyên trong một bảng như sau :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(3x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng cho biết dấu $f(x)=(x-2)(3x+4)$ như sau :

$$f(x)>0 \quad \text{với} \quad x<-\frac{4}{3} \quad \text{và} \quad x>2$$

$$f(x)<0 \quad \text{với} \quad -\frac{4}{3}<x<2.$$

b) $g(x)=\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{5}{2x+1}=\dfrac{3-x}{(x-1)(2x+1)}$

$g(x)$ không xác định với $x=-\frac{1}{2}$ và $x=1$. Với $x\neq-\frac{1}{2}$ và $x\neq 2$ thì $g(x)$ có dấu cùng dấu với tích $(3-x)(x-1)(2x+1)$.

Tương tự câu a), ta lập bảng xét dấu như sau :

x		$-\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
$3-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$g(x)$	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

Kết luận : $g(x)>0$ với $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;3)$

$g(x)<0$ với $x\in\left(-\frac{1}{2};1\right)\cup(3;+\infty)$.

4.61. Giải bất phương trình :

a) $\dfrac{2x-5}{2-x} \geq -1$. **b)** $\dfrac{-4}{3x+1} < \dfrac{3}{2-x}$.

Hướng dẫn

a) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{2x-5}{2-x} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{x-3}{2-x} \geq 0$

Lập bảng xét dấu vế trái của bất phương trình cuối

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$\dfrac{x-3}{2-x}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

Từ bảng cho ta tập nghiệm của bất phương trình $T = (2; 3]$.

b) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{3}{2-x} + \dfrac{4}{3x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{5x+11}{(2-x)(3x+1)} > 0$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\dfrac{11}{5}$		$-\dfrac{1}{3}$		2		$+\infty$
$5x+11$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$3x+1$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{5x+11}{(2-x)(3x+1)}$		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	

Tập nghiệm : $T = \left(-\infty; -\dfrac{11}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{3}; 2\right)$.

4.62. Giải và biện luận bất phương trình theo tham số m

a) $(2-m)x + 1 > m^2x - 2$ (1) **b)** $m(mx-5) < 4x - 5$ (2)

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow \quad (m^2 + m - 2)x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad (m+2)(m-1)x < 3$

Lập bảng xét dấu của hệ số của x

m	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$m-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$m+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(m-1)(m+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên ta kết luận về nghiệm của (1) như sau :

- Nếu $m < -2$ hoặc $m > 1$ thì (1) có nghiệm $x < \dfrac{3}{(m-1)(m+2)}$
- Nếu $-2 < m < 1$ thì (1) có nghiệm là $x > \dfrac{3}{(m-1)(m+2)}$
- Nếu $m = -2$ hoặc $m = 1$ thì bất phương trình trở thành $0x < 3$. Mọi số thực x đều là nghiệm của (1).

b) Làm tương tự câu a). Kết quả như sau :

- Nếu $m < -2$ hoặc $m > 2$ nghiệm của (2) là : $x < \dfrac{5(m-1)}{m^2-4}$
- Nếu $-2 < m < 2$ thì nghiệm của (2) là : $x > \dfrac{5(m-1)}{m^2-1}$
- Nếu $m = -2$ thì (2) trở thành $0x < -15$: vô nghiệm.
- Nếu $m = 2$ thì có $0x < 5$. Mọi số thực đều là nghiệm của (2).

4.63. Giải các phương trình :

a) $|2x-3| + |x+4| = 6$ (1) **b)** $|3x-1| - |2x+5| = 4$ (2)

Hướng dẫn

a) Ta có : $|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{nếu } x \ge \dfrac{3}{2} \\ -2x+3 & \text{nếu } x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$|x+4| = \begin{cases} x+4 & \text{nếu } x \ge -4 \\ -x-4 & \text{nếu } x < -4 \end{cases}$

Tùy theo từng trường hợp, vế trái của (1) được cho trong bảng sau :

x	$-\infty$		-4		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$		$-2x+3$		$-2x+3$	0	$2x-3$	
$\lvert x+4\rvert$		$-x-4$	0	$x+4$		$x+4$	
VT (1)		$-3x-1$		$-x+7$		$3x+1$	

Như vậy $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ -3x - 1 = 6 \end{cases}$ vô nghiệm

hoặc $\begin{cases} -4 < x < \dfrac{3}{2} \\ -x + 7 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $\begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 3x + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Vậy (1) có 2 nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{5}{3}$.

b) Làm tương tự câu a). Kết quả là (2) có 2 nghiệm $x = -\dfrac{8}{5}$ và $x = 10$.

4.64. Giải các bất phương trình :

a) $|2x + 3| < 4$ (1) **b)** $\left|\dfrac{2 - x}{x + 3}\right| \geq 5$ (2)

c) $|x - 2| \leq 2x - 1$ (3)

Hướng dẫn

a) $(1) \Leftrightarrow -4 < 2x + 3 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < 2x + 3 \\ 2x + 3 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\dfrac{7}{2} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tập nghiệm của (1) : $T = \left(-\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

b) $(2) \Leftrightarrow \dfrac{2 - x}{x + 3} \geq 5$ (*) hoặc $\dfrac{2 - x}{x + 3} \leq -5$ (**)

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{2 - x}{x + 3} - 5 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-6x - 13}{x + 3} \geq 0 \Leftrightarrow -3 < x \leq -\dfrac{13}{6}$.

$(**) \Leftrightarrow 5 + \dfrac{2 - x}{x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x + 17}{x + 3} \leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{17}{4} \leq x < -3$.

Tập nghiệm của (2) là $T = \left[-\dfrac{17}{4}; -3\right) \cup \left(-3; -\dfrac{13}{6}\right]$.

c) $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x - 2 \leq 2x - 1 \\ -2x + 1 \leq x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Tập nghiệm của (3) là $T = (1; +\infty)$.

PHƯƠNG PHÁP KHOẢNG GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Người ta chứng minh được rằng nếu f(x) là tích của các nhị thức bậ nhất có các nghiệm khác nhau từng đôi thì các nghiệm của nó chi trục số thành các khoảng rời nhau. Biểu thức f(x) không thay đổi dấ nếu x lấy các giá trị trong một khoảng và trái dấu nhau nếu x lấy giá trị thuộc hai khoảng kề nhau.

Để xét dấu của f(x) ta lấy giá trị thuộc một khoảng để tìm dấu của f(x trên khoảng đó rồi suy ra dấu của f(x) trên các khoảng khác. Ta min họa nội dung này trên các bài tập cụ thể.

4.65. Giải bất phương trình : $\dfrac{x+2}{3x+1} \le \dfrac{x-2}{2x-1}$ (1

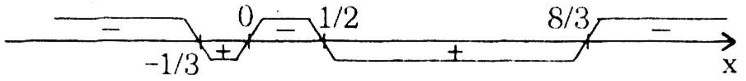
Hướng dẫn

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x(8-3x)}{(3x+1)(2x-1)} \le 0$$

Với điều kiện $x \neq -\dfrac{1}{3}$ và $x \neq \dfrac{1}{2}$ thì dấu của phân thức cùng dấu với

$$f(x) = x(8-3x)(3x+1)(2x-1)$$

Xếp các nghiệm của f(x) theo thứ tự tăng dần là : $-\dfrac{1}{3} < 0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{8}{3}$.



Với giá trị $x = 1 \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{8}{3}\right)$ ta có $f(1) = 1(8-3)(3+1)(2-1) > 0$

Như vậy $f(x) > 0$ với $x \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{8}{3}\right)$ hoặc $x \in \left(-\dfrac{1}{3}; 0\right)$

$f(x) < 0$ với $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right)$ hoặc $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ hoặc $x \in \left(\dfrac{8}{3}; +\infty\right)$

Từ đó ta có tập nghiệm của bất phương trình (1) là :

$$T = \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{8}{3}; +\infty\right).$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

4.66. Xét dấu của các biểu thức :

a) $f(x) = \dfrac{3-2x}{4x+5}$.

b) $g(x) = 3 - \dfrac{5-2x}{3x+2}$.

4.67. Phân tích các đa thức thành nhân tử rồi xét dấu của các biểu thức :

a) $x^2 - 7x + 6$. **b)** $x^3 + 4x^2 + x - 6$.

c) $x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 7x - 10$. **d)** $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 + 5x + 2}$.

4.68. Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{4x - 3}{x + 2} > 1$. **b)** $\dfrac{2x + 3}{5 - x} \le 1$.

c) $\dfrac{3}{x - 1} \le \dfrac{4}{2x + 1}$. **d)** $\dfrac{-3}{5x + 2} > \dfrac{4}{3 - x}$.

4.69. Giải phương trình

a) $|2x + 5| + 3x = 4$. **b)** $|3x - 2| - |2x + 5| = 4$.

4.70. Giải các bất phương trình

a) $|2x + 3| < 5$. **b)** $|3x - 2| < 5 + x$.

c) $|x - 3| > x + 1$.

4.71. Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình

a) $(m + 1)x + m < 3x - 4$. **b)** $\dfrac{x - m}{mx - 1} < m$.

§4. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Mệnh đề chứa hai biến dạng : $ax + by > c$ (hoặc $ax + by < c$ hoặc $ax + by \ge c$ hoặc $ax + by \le c$) trong đó x, y là các biến, a, b, c là các số đã biết với a, b không đồng thời bằng 0 được gọi là ***bất phương trình bậc nhất hai ẩn****.*

Một cặp số (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 > c$ là mệnh đề đúng được gọi là một nghiệm của bất phương trình $ax + by > c$.

Một bất phương trình bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm. Tập hợp các nghiệm của bất phương trình được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ là ***một nửa mặt phẳng*** *không kể bờ (kể cả bờ, nếu bất phương trình có dấu ≥ hoặc ≤) gọi là* ***miền nghiệm*** *của bất phương trình.*

2. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Là tập hợp không ít hơn hai bất phương trình bậc nhất hai ẩn mà t cần xác định tập nghiệm chung của chúng.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình hai ẩn là giao của các nửa mặ phẳng (kể cả bờ hoặc không kể bờ tùy trường hợp) biểu diễn các tậ nghiệm của các bất phương trình của hệ.

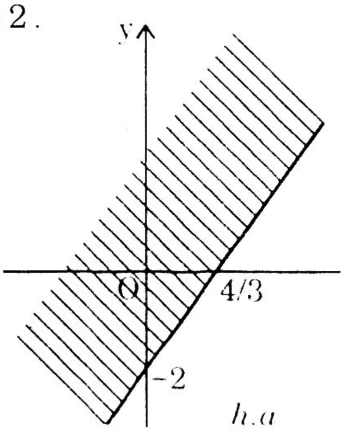
B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

4.72. Vẽ miền nghiệm của các bất phương trình

a) $3(x-1) - 2y > 1$ (1) **b)** $4(x-1) + 5y \geq 2x + 6$ (2

Hướng dẫn

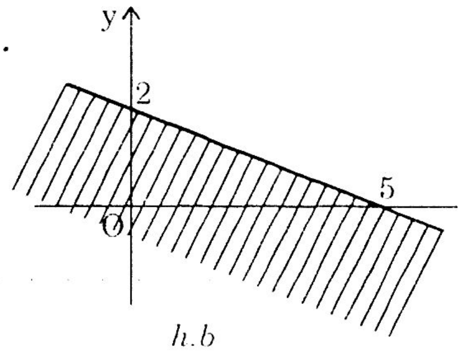
a) (1) $\Leftrightarrow \quad y < \frac{3}{2}x - 2$. Vẽ đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - 2$.



h.a

Thay tọa độ điểm gốc O(0; 0) vào (1) ta thấy (0; 0) không nghiệm đúng (1). Như vậy điểm O(0; 0) không thuộc miền nghiệm của (1). Suy ra miền nghiệm của (1) là các điểm thuộc nửa mặt phẳng không kể bờ là đường thẳng $y = \frac{3}{2}x - 2$. (Miền không bị gạch sọc trên hình h.a) không chứa điểm O(0; 0).

b) (2) $\Leftrightarrow \quad y \geq -\frac{2}{5}x + 2$. Vẽ đường thẳng $y = -\frac{2}{5}x + 2$



h.b

Thay tọa độ O(0; 0) vào (2) ta thấy (0; 0) không nghiệm đúng (2). Suy ra miền nghiệm của (2) là nửa mặt phẳng kể cả bờ là đường $y = -\frac{2}{5}x + 2$ (Miền không bị gạch sọc trong hình h.b) không chứa điểm O(0; 0).

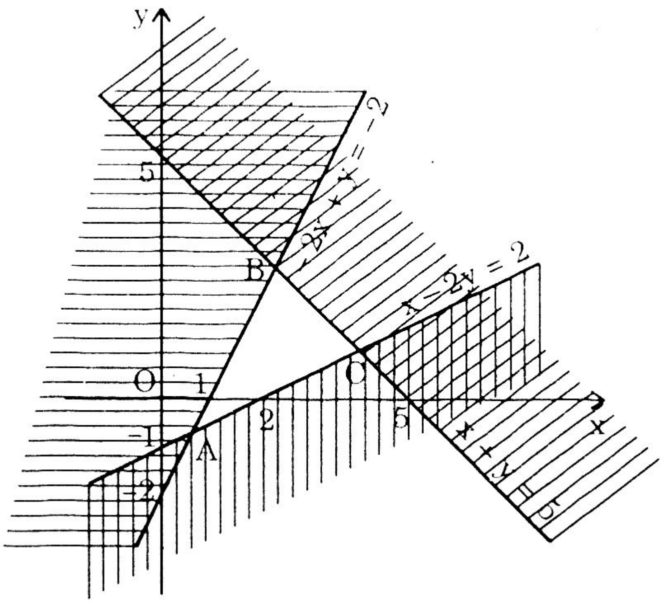
4.73. Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$(\text{I}) \begin{cases} -2x + y \leq -2 & (1) \\ x - 2y \leq 2 & (2) \\ x + y \leq 5 & (3) \\ x \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Hướng dẫn

Miền nghiệm của hệ (1) là giao của miền nghiệm các bất phương trình (1), (2), (3) và (4). Đó chính là các điểm của tam giác ABC (kể cả các điểm thuộc các cạnh của nó) trong đó

$A\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{7}{3}; \frac{8}{3}\right)$, C(4; 1).



C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

1.74. Hãy vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình : $\begin{cases} x - 2y < 1 \\ x + 2y > -3 \\ y + x < 2 \end{cases}$

1.75. Tìm các cặp số (x, y) thỏa mãn hệ bất phương trình dưới đây sao cho nó làm cho biểu thức S = –x + y đạt giá trị nhỏ nhất

$$\begin{cases} y \le 2 \\ y \le x \\ x + y \le 5 \\ y \ge 0,\ x \le 4 \end{cases}$$

§5. Dấu của tam thức bậc hai. Bất phương trình bậc hai

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Dấu của tam thức bậc hai

Định lí. *Gọi* $\Delta = b^2 - 4ac$ *là biệt thức của tam thức bậc hai*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

- *Nếu* $\Delta < 0$ *thì với mọi* $x \in R$, $f(x)$ *có cùng dấu với hệ số a.*
- *Nếu* $\Delta = 0$ *thì* $f(x) = 0$ *với* $x = -\frac{b}{2a}$, *và với mọi* $x \neq -\frac{b}{2a}$ $f(x)$ *luôn cùng dấu với hệ số a.*
- *Nếu* $\Delta > 0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ *và* $f(x)$ *trái dấu với hệ số a với mọi x thuộc* $(-\infty; x_1)$ *hay* $(x_2; +\infty)$.

Định lí có thể tóm tắt như sau :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0), \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta < 0 \quad \Rightarrow \quad af(x) > 0 \;\; \forall x \in R$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0,\ af(x) > 0 \quad \forall x \neq -\frac{b}{2a}$$

$$\Delta > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x_1, x_2 \in R : x_1 < x_2,\ f(x_1) = f(x_2) = 0$$

$$af(x) < 0 \;\; \forall x \in (x_1; x_2), \qquad af(x) > 0 \;\; \forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$$

2. Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai

Định lí. *Cho tam thức* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *và số* α.

Nếu $af(\alpha) < 0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ *và* $x_1 < \alpha < x_2$.

Hệ quả 1. *Điều kiện cần và đủ để phương trình bậc hai*

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

có hai nghiệm phân biệt là có một số $\alpha \in R$ *sao cho* $af(\alpha) < 0$.

Hệ quả 2. *Cho tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *và hai số* α, β $(\alpha < \beta)$. *Điều kiện cần và đủ để phương trình* $f(x) = 0$ *có hai nghiệm trong đó một nghiệm nằm trong khoảng* $(\alpha; \beta)$ *là :* $f(\alpha).f(\beta) < 0$.

3. So sánh một số với các nghiệm của một tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *và số* $\alpha \in R$.

- *Nếu* $af(\alpha) < 0$ *thì* $x_1 < \alpha < x_2$, *trong đó* $f(x_1) = f(x_2) = 0$ *và* $x_1 < x_2$.
- *Nếu* $af(\alpha) = 0$, α *là một nghiệm của* $f(x)$.
- *Nếu* $af(\alpha) > 0$, *ta xét thêm* $\Delta = b^2 - 4ac$.

  i) Nếu $\Delta < 0$ *thì* $f(x)$ *vô nghiệm.*

  ii) Nếu $\Delta > 0$ *và* $-\dfrac{b}{2a} - \alpha > 0$ *thì* $\alpha < x_1 < x_2$.

  iii) Nếu $\Delta > 0$ *và* $-\dfrac{b}{2a} - \alpha < 0$ *thì* $x_1 < x_2 < \alpha$, *trong đó*

$$f(x_1) = f(x_2) = 0 \quad \text{và} \quad x_1 < x_2.$$

4. Bất phương trình bậc hai một ẩn

Là mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, *trong đó x là biến a, b, c là các số đã cho với* $a \neq 0$.

Để giải bất phương trình bậc hai một ẩn ta sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

4.76. Xét dấu của biểu thức theo giá trị của biến số :

a) $f(x) = 2x^2 + x - 3$. **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4} + 1$.

Hướng dẫn

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

$f(x) < 0$ với $x \in \left(-\dfrac{3}{2}; 1\right)$, $f(x) > 0$ với $x \in R\backslash\left[-\dfrac{3}{2}; 1\right]$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4} + 1 = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4}$

$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$,

$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 1$		+		+	0	−	0	+		+	
$x^2 - 4$		+	0	−		−		−	0	+	
$g(x)$		+	‖	−	0	+	0	−	‖	+	

Kết luận : $g(x) > 0$ với $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup (2; +\infty)$

$g(x) < 0$ với $x \in \left(-2; \dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$.

4.77. Giải các bất phương trình và biểu diễn nghiệm trên trục số.

a) $2x^2 - 5x + 2 \geq 0$ (1) **b)** $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x - 1} > \dfrac{2x^2 + x + 15}{x - 3}$ (2)

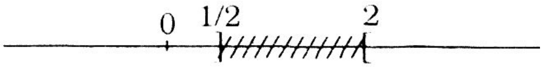
Hướng dẫn

a) Xét dấu của tam thức vế trái $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

Biệt thức $\Delta = 5^2 - 4.2^2 = 9 > 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{2},\ x_2 = 2$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f(x)		+	0	−	0	+	

Tập nghiệm : $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [2; +\infty)$.



b) (2) $\Leftrightarrow \quad \frac{2x^2-5x+2}{x-1} - \frac{2x^2+x+15}{x-3} = \frac{-10x^2+3x+9}{(x-1)(x-3)} > 0$

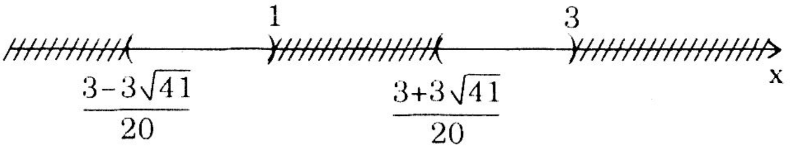
$\Leftrightarrow \quad g(x) = (x-1)(x-3)(-10x^2+3x+9) > 0$

Lập bảng xét dấu của g(x) :

x	$-\infty$		$\frac{3-3\sqrt{41}}{20}$		1		$\frac{3+3\sqrt{41}}{20}$		3		$+\infty$
$x-1$		−	|	−	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	|	−	|	−	0	+	
$-10x^2+3x+9$		−	0	+	|	+	0	−	|	−	
g(x)		−	0	+	||	−	0	+	||	−	

Từ bảng xét dấu của g(x) suy ra tập nghiệm của (2) như sau :

$$T = \left(\frac{3-3\sqrt{41}}{20}; 1\right) \cup \left(\frac{3+3\sqrt{41}}{20}; 3\right)$$



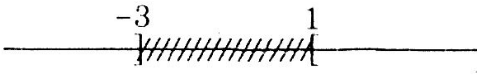
4.78. Giải hệ bất phương trình và biểu diễn tập nghiệm trên trục số

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x^2+4x+3 \geq 0 & (1) \\ 2x^2-5x+3 > 0 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn

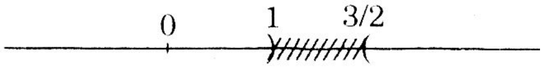
(1) $\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.

Biểu diễn tập nghiệm (1) trên trục số.



(2) $\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

Biểu diễn tập nghiệm của (2) trên trục số.

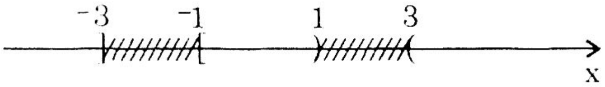


Nghiệm của hệ (I) là giao của các tập nghiệm của (1) và của (2).

$$T = \{(-\infty; -3) \cup (-1; +\infty)\} \cap \left\{(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)\right\}$$

$$= (-\infty; -3] \cup [-1; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Biểu diễn tập nghiệm của (I) trên trục số.



4.79. Cho phương trình với tham số m :

$$(3m + 1)x^2 - (3m + 1)x + m + 4 = 0 \qquad (1)$$

Với những giá trị nào của m phương trình có 2 nghiệm phân biệt ?

Hướng dẫn

Nếu $m = -\frac{1}{3}$ thì (1) có một nghiệm. Nếu $m \neq -\frac{1}{3}$ thì (1) là phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta = (3m + 1)^2 - 4(3m + 1)(m + 4)$$

$$= -(3m + 1)(m + 15) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -15 \text{ hoặc } m = -\frac{1}{3}$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt nếu $\Delta > 0$, tức là với $-15 < m < -\frac{1}{3}$.

4.80. Cho phương trình với tham số m :

$$(m - 4)x^2 + (m + 1)x + 2m - 1 = 0 \qquad (1).$$

Với các giá trị nào của m, phương trình (1) vô nghiệm ?

Hướng dẫn

Với m = 4, phương trình có nghiệm.

Nếu $m \neq 4$ thì (1) là phương trình bậc hai có biệt thức

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4(m - 4)(2m - 1) = -7m^2 + 38 - 15$$

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{3}{7} \text{ hoặc } m = 5$$

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < \frac{3}{7} \text{ hoặc } m > 5.$$

Vậy (1) vô nghiệm nếu $m \in \left(-\infty; \frac{3}{7}\right) \cup (5; +\infty)$.

4.81. Với những giá trị nào của m biểu thức $f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 2m - 1$ luôn dương với mọi giá trị của x.

Hướng dẫn

Nếu $m = -1$ thì $f(x)$ là nhị thức bậc nhất sẽ đổi dấu khi x biến đổi qua nghiệm. Ta loại trường hợp $m = -1$.

Nếu $m \neq -1$ thì $f(x)$ là tam thức bậc hai.

$$f(x) > 0 \ \forall x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta = m^2 - (m + 1)(2m - 1) < 0 \end{cases}$$

$$\Delta = -m^2 - m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < -1 - \sqrt{2} \ \text{ hay } \ m > -1 + \sqrt{2}$$

Do đó $\begin{cases} m + 1 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad m > -1 + \sqrt{2}$

Kết luận : Nếu $m > -1 + \sqrt{2}$ thì $f(x) > 0 \ \forall x$.

4.82. Giải và biện luận theo tham số m các bất phương trình :

a) $x^2 + (m - 1)x + 1 > 0 \quad (1)$ **b)** $mx^2 + (m - 3)x + m - 3 < 0 \quad (2)$

Hướng dẫn

a) Biệt thức tam thức vế trái : $\Delta = (m - 1)^2 - 4$.

$$\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1 \ \text{ hoặc } \ m = 3$$

- Nếu $-1 < m < 3$ thì $\Delta < 0$, mọi số thực $x \in R$ đều là nghiệm của (1).
- Nếu $m = -1$ hoặc $m = 3$ thì $\Delta = 0$, tam thức vế trái dương với mọi $x \neq -\dfrac{m - 1}{2}$. Tập nghiệm của (1) là $R \setminus \left\{\dfrac{1 - m}{2}\right\}$.
- Nếu $m < -1$ hoặc $m > 3$ tập nghiệm của (1) là :

$$\left(-\infty; \frac{-m + 1 - \sqrt{\Delta}}{2}\right) \cup \left(\frac{-m + 1 + \sqrt{\Delta}}{2}; +\infty\right).$$

b)

- Nếu $m = 0$ thì (2) trở thành : $-3x - 3 < 0$.

  Tập nghiệm là $T = (-1; +\infty)$.
- Nếu $m \neq 0$ vế trái là tam thức bậc hai có biệt thức

$$\Delta = (m - 3)^2 - 4m(m - 3) = -3m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = -1 \ \text{ hoặc } \ m = 3.$$

- Nếu $m = -1$ thì (2) trở thành $-(x + 2)^2 < 0$. Tập nghiệm là $T = R\backslash\{-2\}$.
- Nếu $-1 < m < 0$ thì $\Delta > 0$ tam thức vế trái có các nghiệm :

$$x_1 = \frac{-m + 3 - \sqrt{\Delta}}{2m} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{-m + 3 + \sqrt{\Delta}}{2m}$$

Tập nghiệm của (2) là : $T = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

- Nếu $0 < m < 3$ thì $\Delta > 0$ tập nghiệm : $T = (x_1; x_2)$.
- Nếu $m = 3$ thì (2) trở thành $3x^2 < 0$. Vô nghiệm.
- Nếu $m > 3$ thì $\Delta < 0$ bất phương trình (2) vô nghiệm.

4.83. Tìm những giá trị của tham số m để bất phương trình

$$x^2 - (3m - 1)x + 3m - 2 > 0 \qquad (1)$$

được nghiệm đúng với mọi x thỏa mãn : $|x| \geq 2$.

Giải

Tam thức $f(x) = x^2 - (3m - 1)x + 3m - 2$ có biệt thức

$$\Delta = (3m - 1)^2 - 4(3m - 2) = 9(m - 1)^2 \geq 0 \ \forall m.$$

- Nếu $m = 1$, $\Delta = 0$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$, do đó mọi x thỏa mãn $|x| \geq 2$ đều nghiệm đúng (1).
- Nếu $m \neq 1$, $\Delta > 0$, f(x) có 2 nghiệm $x_1 = 3m - 2$, $x_2 = 1$.
- Nếu $m < 1$ thì $3m - 2 < 1$ tập nghiệm của (1) là

$$S = (-\infty; 3m - 2) \cup (1; +\infty)$$

Giá trị x thỏa mãn $|x| \geq 2$ được nghiệm đúng khi $-2 < 3m - 2$ tức là với $m > 0$. Như vậy $0 < m < 1$ thì $|x| \geq 2$ thỏa mãn (1).

- Nếu $m > 1$ thì $3m - 2 > 1$ tập nghiệm của (1) là

$$S = (-\infty; 1) \cup (3m - 2; +\infty)$$

Các giá trị $|x| \geq 2$ thỏa mãn (1) nếu $3m - 2 < 2$, tức $m < \frac{4}{3}$.

Kết luận : Mọi x thỏa mãn $|x| \geq 2$ nghiệm đúng (1) nếu

$$m \in \left(0; \frac{4}{3}\right) \quad (\text{tức là } 0 < m < \frac{4}{3}).$$

4.84. Tìm những giá trị của tham số m để hệ bất phương trình sau đây vô nghiệm :

$$(\text{I}) \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leq 0 & (1) \\ mx \geq 3m + 1 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn

(1) $\Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 4$

- Nếu $m = 0$ thì (2) vô nghiệm, do đó hệ vô nghiệm.
- Nếu $m < 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \quad x \le \dfrac{3m + 1}{m}$

$$[-1; 4] \cap \left(-\infty; \frac{3m+1}{m}\right] = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3m+1}{m} < -1$$

$$\Leftrightarrow \quad 3m + 1 > -m \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{1}{4}$$

Như vậy nếu $-\dfrac{1}{4} < m < 0$ hệ (I) vô nghiệm.

- Nếu $m > 0$ thì (2) $\Leftrightarrow \quad x \ge \dfrac{3m + 1}{m}$

$$[-1; 4] \cap \left[\frac{3m+1}{m}; +\infty\right) = \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad 4 < \frac{3m+1}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m < 1.$$

Như vậy, nếu $0 < m < 1$ thì hệ (I) vô nghiệm.

Kết luận : Nếu $m \in \left(-\dfrac{1}{4}; 1\right)$ thì hệ bất phương trình vô nghiệm.

4.85. Giải và biện luận theo tham số m hệ bất phương trình

$$(I) \begin{cases} x^2 - (m + 1)x + 2(m - 1) \le 0 & (1) \\ x^2 - (m + 2)x + 3(m - 1) \ge 0 & (2) \end{cases}$$

Hướng dẫn

Xét tam thức vế trái (1) :

$$x^2 - (m + 1)x + 2(m - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = m - 1,\ x_2 = 2$$

- Nếu $m - 1 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad m < 3$, nghiệm của (1) là : $T_1 = [m - 1; 2]$
- Nếu $m - 1 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad m > 3$, tập nghiệm của (1) là : $T_1 = [2; m - 1]$

Xét tam thức vế trái của (2) :

$$x^2 - (m + 2)x + 3(m - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = m - 1,\ x_2 = 3$$

- Nếu $m - 1 < 3 \quad \Leftrightarrow \quad m < 4$ thì tập nghiệm của (2) là :

  $T_2 = (-\infty; m - 1] \cup [3; +\infty)$
- Nếu $m - 1 > 3 \quad \Leftrightarrow \quad m > 4$ thì tập nghiệm của (2) là :

  $T_2 = (-\infty; 3] \cup [m - 1; +\infty)$

Tập nghiệm của hệ (I) là $T_1 \cap T_2$ phụ thuộc giá trị của m được cho trong bảng sau :

m	$-\infty$		3		4		$+\infty$
Tập nghiệm T		$\{m - 1\}$	$\{2\}$	$[2; m - 1]$	$[2; 3]$	$[2; 3] \cup \{m - 1\}$	

Kết luận : Nếu $m \le 3$ tập nghiệm của hệ (I) là : $T = \{m - 1\}$.

Nếu $3 < m < 4$ tập nghiệm của hệ (I) là : $T = [2; m - 1]$

Nếu $m \ge 4$ tập nghiệm của hệ (I) là : $T = [2; 3] \cup \{m - 1\}$.

4.86. Tùy theo tham số m, hãy so sánh số 2 với nghiệm của phương trình :

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0 \qquad (1)$$

Hướng dẫn

Hệ số bậc hai của tam thức $f(x) = x^2 - (m + 1)x + m$ là $1 > 0$.

Ta có $af(\alpha) = 1.f(2) = 2 - m$.

- Nếu $2 - m < 0 \Leftrightarrow m > 2$ thì (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2$
- Nếu $2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì (1) có các nghiệm : $1 = x_1 < x_2 = 2$
- Nếu $2 - m > 0 \Leftrightarrow m < 2$ ta xét biệt thức của f(x) :

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4m = (m - 1)^2$$

Nếu $m = 1$ thì (1) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = 1 < 2$.

Nếu $m \ne 1$ thì $\Delta > 0$ phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 với tổng

$$\frac{S}{2} - 2 = \frac{m + 1}{2} - 2 = \frac{m - 3}{2} < 0 \text{ (vì } m < 2) \text{ nên } x_1 < x_2 < 2.$$

Tóm tắt kết quả so sánh theo m như sau :

m	So sánh nghiệm với 2
$-\infty$	
	$x_1 < x_2 < 2$
1	$\Delta = 0$, $x_1 = x_2 = 1 < 2$
	$x_1 < x_2 < 2$
2	$x_1 = 1 < x_2 = 2$
	$x_1 < 2 < x_2$
$+\infty$	

4.87. Cho phương trình : $(m-1)x^2 - 2mx + m + 5 = 0$ (1)

Tìm những giá trị của m để phương trình có một nghiệm thuộc khoảng (0; 1).

Hướng dẫn

- Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì (1) có nghiệm $x = 3 \notin (0; 1)$.
- Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (1) là phương trình bậc hai.

Áp dụng hệ quả 2 định lí đảo dấu tam thức thì phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm trong đó một nghiệm nằm trong khoảng (0; 1) là

$$f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow (m+5).4 < 0 \Leftrightarrow m < -5.$$

Đáp số : $m < -5$.

4.88. Tìm các giá trị của m để phương trình :

$$4x^2 - (3m+1)x - m - 2 = 0 \qquad (1)$$

có hai nghiệm thuộc khoảng (−1; 2).

Hướng dẫn

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì m phải nghiệm đúng hệ bất phương trình

$$\begin{cases} \Delta = (3m+1)^2 + 16(m+2) > 0 \\ af(-1) = 4[4 + (3m+1) - m - 2] > 0 \\ af(2) = 4[16 - 2(3m+1) - m - 2] > 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} = \dfrac{3m+1}{8} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 2m + 33 > 0 \\ 2m + 3 > 0 \\ -7m + 12 > 0 \\ -8 < 3m + 1 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 5 \\ m > -\dfrac{3}{2} \\ m < \dfrac{12}{7} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} < m < \frac{12}{7}$$

Kết luận : Với $m \in \left(-\dfrac{3}{2}; \dfrac{12}{7}\right)$ thì phương trình có 2 nghiệm thuộc khoảng (−1; 2).

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

4.89. Xét dấu của các biểu thức

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 7x + 4}$. b) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{4x^2 - 19x + 12}$.

c) $h(x) = \dfrac{x^3 - 5x + 4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 5}$.

4.90. Chứng tỏ rằng các phương trình sau luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m.

a) $x^2 - 2(m - 1)x + 2m - 5 = 0$.

b) $(m - 1)x^2 + (3m - 2)x + 3 - 2m = 0$.

4.91. Chứng tỏ rằng các phương trình sau đây luôn vô nghiệm dù tham số m lấy bất kì giá trị nào.

a) $x^2 - 2(m - 1)x + 2m^2 - 3m + 2 = 0$.

b) $x^2 - (\sqrt{3}m - 1)x + m^2 - \sqrt{3}m + 2 = 0$.

4.92. Giải các bất phương trình :

a) $2x^2 - 13x + 18 > 0$.　　**b)** $3x^2 - 20x - 7 < 0$.

4.93. Giải hệ bất phương trình

a) $\begin{cases} 5x^2 - 24x - 77 < 0 \\ -2x^2 + 5x + 3 < 0 \end{cases}$　　**b)** $\begin{cases} x^2 - 14x + 1 > 0 \\ x^2 - 18x + 1 < 0 \end{cases}$

4.94. Tìm các giá trị của x sao cho : $-1 < \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 3} < 3$.

4.95. Với các giá trị nào của tham số m các biểu thức sau dương với mọi $x \in R$.

a) $x^2 - 8x + m + 10$.　　**b)** $(m + 2)x^2 + 3(m + 2)x + m + 3$.

4.96. Với các giá trị nào của tham số m các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $(m^2 - 1)x^2 + (2m - 1)x + 3 > 0$.

b) $(m + 1)x^2 - 2(3 - m)x + 2m + 1 < 0$.

4.97. Giải và biện luận theo tham số m các bất phương trình

a) $mx^2 - (m + 1)x + 3 \geq 0$.　　**b)** $(mx - 2)(x - 1) < 0$.

4.98. Với giá trị nào của tham số m thì hệ bất phương trình sau đây có nghiệm

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 & (1) \\ (m^2 - 3m + 2)x > 2 & (2) \end{cases}$$

4.99. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình kép dưới đây được nghiệm đúng với mọi $x \in R$:

$$1 \leq \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6.$$

4.100. Tùy theo giá trị của số m, hãy so sánh số 2 với các nghiệm của phương trình :

$$(m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 2m - 6 = 0.$$

4.101. Xác định các giá trị của tham số m để

a) Phương trình $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1 < 3 < x_2$.

b) Phương trình $(m - 1)x^2 - (m - 5)x + m - 1 = 0$ có các nghiệm thỏa mãn điều kiện $-1 < x_1 < x_2$.

4.102. Xác định các giá trị của tham số m để

a) Phương trình $mx^2 - 2(m + 1)x + m + 5 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x_1 < 0 < x_2 < 2$.

b) Phương trình $(m - 2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $-6 < x_1 < 4 < x_2$.

§6. Một số phương trình bất phương trình quy về bậc hai

Ta thường phải giải các phương trình bậc cao hơn 2, phương trình bất phương trình chứa mẫu thức chứa dấu giá trị tuyệt đối, chứa dấu căn thức. Để giải quyết vấn đề trên dẫu tới phải giải các phương trình bất phương trình bậc hai. Ta xét vấn đề trên qua các ví dụ giải toán.

4.103. Cho phương trình chứa tham số m :

$$x^4 - 2mx^2 - 3m^2 = 0 \qquad (1)$$

a) Giải phương trình với m = 1.

b) Xác định giá trị của m để (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn

a) Thay $m = 1$ vào (1) ta có : $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$.

Đặt $x^2 = t \geq 0$ thì có : $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3,\ t_2 = -1$ (loại)

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

b) $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2mt - 3m^2 = 0 \\ x^2 = t \geq 0 \end{cases}$

Để (1) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(t) = t^2 - 2mt - 3m^2 = 0$ phải có 2 nghiệm dương. Điều này xảy ra nếu hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\Delta' = m^2 + 3m^2 > 0\\ P = -3m^2 > 0\\ S = 2m > 0\end{cases}$$

Nhưng hệ (I) vô nghiệm. Vậy không có giá trị nào của tham số m để (1) có 4 nghiệm phân biệt.

4.104. Giải phương trình : $\left|x^2 - 3|x| + 2\right| - x^2 + 2x = 0$ (1)

Hướng dẫn

$(1) \Leftrightarrow \left|x^2 - 3|x| + 2\right| = x^2 - 2x$

ĐKXĐ : $x^2 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0$ hoặc $x \geq 2$.

Với $x \leq 0$ thì $x^2 - 3|x| + 2 = x^2 + 3x + 2$

$$|x^2 + 3x + 2| = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{với} \quad x \leq -2 \text{ hoặc } -1 \leq x \leq 0\\ -(x^2 + 3x + 2) & \text{với} \quad -2 < x < -1\end{cases}$$

Với $x \geq 2$ thì $x^2 - 3|x| + 2 = x^2 - 3x + 2$

$$|x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{với} \quad x \geq 2 \text{ hay } x \leq 1\\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{với} \quad 1 \leq x \leq 2\end{cases}$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ hoặc } -1 \leq x \leq 0\\ x^2 + 3x + 2 = x^2 - 2x\end{cases}$ (A)

hoặc $\begin{cases} -2 < x < -1\\ -(x^2 + 3x + 2) = x^2 - 2x\end{cases}$ (B)

hoặc $\begin{cases} x \geq 2\\ x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x\end{cases}$ (C)

(A) $\Leftrightarrow \quad x = -\dfrac{2}{5}$, (B) vô nghiệm, (C) $\Leftrightarrow \quad x = 2$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm $T = \left\{-\dfrac{2}{5}; 2\right\}$.

4.105. Giải bất phương trình : $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$ (1)

Hướng dẫn

Nếu $8 - 2x < 0$ thì (1) được nghiệm đúng với mọi x sao cho

$$-x^2 + 6x - 5 \geq 0$$

Nếu $8 - 2x \geq 0$ thì (1) được nghiệm đúng với $x \in R$ sao cho

$$-x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2.$$

Do đó ta có thể viết :

$$(1) \Leftrightarrow \quad (A) \begin{cases} 8 - 2x < 0 \\ -x^2 + 6x - 5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad (B) \begin{cases} 8 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 6x - 5 > (8 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$(A) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 4 \\ 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 4 < x \leq 5$$

$$(B) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 4 \\ 5x^2 - 38x + 69 < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 3 < x \leq 4$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $T = (3; 5]$.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

4.106. Giải các phương trình

a) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$ **b)** $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 2$.

4.107. Cho phương trình với tham số m :

$$x^4 - 2(m + 1)x^2 + 2m + 1 = 0$$

Tìm giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

4.108. Cho phương trình chứa tham số m :

$$x^2 + 2x - 2|x + 1| + m + 2 = 0$$

Xác định giá trị của m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

4.109. Giải bất phương trình : $|x^2 - 2x - 8| > 2x$.

4.110. Giải các phương trình :

a) $x - \sqrt{2x + 7} = 4$. **b)** $\sqrt{5x - 1} = \sqrt{3x - 2} - \sqrt{2x - 3}$.

4.111. Với giá trị nào của m thì phương trình sau đây có nghiệm :

$$2x - 3\sqrt{x - m} = 4.$$

4.112. Giải bất phương trình : $\dfrac{\sqrt{-3x^2 + x + 4} + 2}{x} < 2$.

4.113. Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình sau đây có nghiệm

$$x - m\sqrt{x - 1} > m + 1.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

4.114. Chứng minh

a) $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2(a + b) \quad \forall a, b \in R$.

b) $a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a} \quad \forall a \geq 0$.

c) $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leq \dfrac{a+b+c}{2} \quad \forall a, b, c > 0$.

d) $\forall a, b, c, d > 0$ $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, thì $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$.

4.115. a) Cho tam giác vuông có cạnh huyền là a, các cạnh góc vuông là b, c.

Chứng minh : $a^n \geq b^n + c^n \quad \forall n \in Z, n \geq 2$.

b) Chứng minh : $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} \quad \forall n \in N^*$.

4.116. Chứng minh :

a) Nếu $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ thì

$$\frac{\sqrt{1 + x^3 + y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1 + y^3 + z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1 + z^3 + x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

b) Nếu $x, y, z > 0$ $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 4$ thì

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z} \leq 1.$$

4.117. Tam giác ABC có diện tích bằng $\dfrac{3}{2}$ đvdt. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh, với các đường cao tương ứng h_a, h_b, h_c.

Chứng minh : $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\left(\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}\right) \geq 3$.

4.118. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $x + \dfrac{2}{x - 3}$ với $x > 3$.

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ với $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 2$.

c) $2x^2 + 3y^2$ với $2x + 3y = 7$.

4.119. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

a) $\sqrt{10 - x} + \sqrt{x + 6}$ với $-6 \leq x \leq 10$.

b) $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{7-3x}$ với $x \in \left[\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right]$.

c) $x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$ với $x, y > 0$ $x^2 + y^2 = 1$.

4.120. Giải các bất phương trình

a) $\dfrac{2x-3}{x+1} \le -5$. **b)** $\dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{5}{2x-1}$.

4.121. Giải và biện luận theo tham số m.

a) $mx + 8 > 2x + 3m$. **b)** $\dfrac{x}{m-1} > 2 - x$.

4.122. Cho bất phương trình chứa tham số m

$$\frac{x-2m-3}{x-m+2} < 0 \qquad (1$$

Với giá trị nào của m thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi x $[1; 2]$.

4.123. Tìm giá trị của m để $\forall x \in R$ nghiệm đúng các điều kiện

$$1 \le \frac{3x^2 - mx + 5}{3x^2 - x + 1} \le 6, \qquad (1$$

4.124. Với giá trị nào của tham số m các bất phương trình sau vô nghiệm ?

a) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 < 0$ (1

b) $(m - 3)x^2 + (m + 2)x - 4 > 0$ (2

4.125. a) Giải và biện luận bất phương trình

$$(m + 1)x^2 - 2mx + 2m \le 0 \qquad (1$$

b) Cho hệ bất phương trình (I) $\begin{cases} x^2 - 8x + 7 \le 0 & (1) \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0 & (2) \end{cases}$

Tìm giá trị của m để hệ bất phương trình có nghiệm ? Có nghiệm du nhất.

4.126. Tùy theo giá trị của m, hãy so sánh 1 với nghiệm (nếu có) của phươn trình : $f(x) = x^2 - (m + 2)x + 5m + 1 = 0$.

4.127.a) Xác định m để phương trình $x^2 - 2(m + 2)x + m + 2 = 0$ có h nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2 < 2$.

b) Xác định m để phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m^2 + 4m - 5 =$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $2 < x_1 < x_2$.

Chương V

THỐNG KÊ

§1. Bảng phân phối thực nghiệm tần số - tần suất

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mẫu số liệu

Vấn đề người điều tra nghiên cứu quan tâm ta gọi là ***dấu hiệu****. Một tập hợp con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một* ***mẫu****. Số đơn vị điều tra có trong mẫu gọi là* ***kích thước*** *hay* ***cỡ*** *của mẫu. Dãy các giá trị của dấu hiệu nhận được trên mẫu gọi là* ***mẫu số liệu****.*

2. Bảng phân phối thực nghiệm tần số – tần suất rời rạc

Số lần xuất hiện của một giá trị trong mẫu số liệu được gọi là ***tần số*** *của giá trị đó. Tỉ số của* ***tần số*** *của một giá trị trong mẫu đối với kích thước của mẫu gọi là* ***tần suất*** *của giá trị đó.*

Bảng kê các giá trị khác nhau của mẫu số liệu cùng các tần số (tần suất) tương ứng của chúng được gọi là ***bảng phân phối thực nghiệm tần số (tần suất) rời rạc*** *của dấu hiệu.*

3. Bảng phân phối thực nghiệm tần số (tần suất) ghép lớp

– ***Ghép lớp (nhóm) :*** *Khi một mẫu số liệu có kích thước khá lớn thì người ta ghép lớp bằng cách chia khoảng (đủ nhỏ) chứa tất cả các giá trị của mẫu số liệu thành các nửa khoảng* $[x_i; x_{i+1})$ *bằng nhau. Các giá trị của mẫu số liệu nằm trong nửa khoảng* $[x_i; x_{i+1})$ *là lớp thứ i (i = 1, 2, ..., k).*

+ *Số* $x_i^0 = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ *là giá trị đại diện cho lớp thứ i;*

+ *Số* n_i *các giá trị nằm trong lớp thứ i là* ***tần số của lớp thứ i;***

+ *Số* $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ *là tần suất của lớp thứ i (n là kích thước của mẫu);*

Một bảng ghi các giá trị đại diện và tần số (tần suất) tương ứng của các lớp gọi là ***bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp****.*

4. Biểu đồ tần số, tần suất

Để biểu diễn trực quan bảng phân phối thực nghiệm tần số (tần suất) người ta vẽ ***biểu đồ hình cột, biểu đồ hình quạt*** *hay* ***đường gấp khúc tần số (tần suất)****.*

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

5.1. Nhiệt độ của 24 thành phố của Việt Nam được ghi trong cùng một giờ cùng một ngày trong tháng 7 như sau :

36	30	31	32	31	40	37	29
40	37	35	34	34	35	32	33
35	33	33	31	34	34	35	32

a) Dấu hiệu ở bài toán là gì ? Kích thước (cỡ) của mẫu số liệu là bao nhiêu ?

b) Mẫu có bao nhiêu giá trị khác nhau ?

c) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.

d) Vẽ biểu đồ hình cột của bảng phân phối.

Hướng dẫn

a) Dấu hiệu : Nhiệt độ ngoài trời của các thành phố Việt Nam tron tháng 7.

Kích thước (cỡ) của mẫu số liệu là 24 (n = 24)

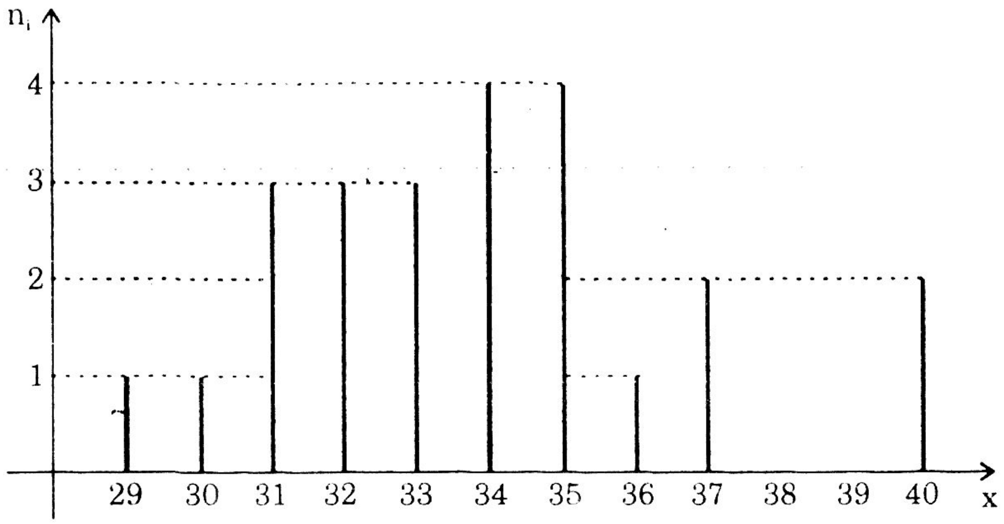
b) Dãy giá trị của mẫu số liệu có 24 giá trị (cỡ của mẫu) với 10 giá tı khác nhau. Đó là các giá trị : 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40.

c) Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc của dấu hiệu.

x_i	29	30	31	32	33	34	35	36	37	40
n_i	1	1	3	3	3	4	4	1	2	2

$\sum n_i = 24$

d) Biểu đồ hình cột của bảng phân phối :



5.2. Đo chiều cao (đơn vị cm) của 50 học sinh lứa tuổi 12 ta được bảng sau :

126	120	132	125	137	136	137	130	145	140
124	133	131	142	129	139	135	137	142	147
142	130	135	131	143	130	136	135	129	135
137	125	132	136	128	129	143	151	134	135
133	134	137	138	132	135	136	134	128	139

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp với các lớp

[120; 124), [124; 128), [128; 132), ..., [144; 148), [148; 152].

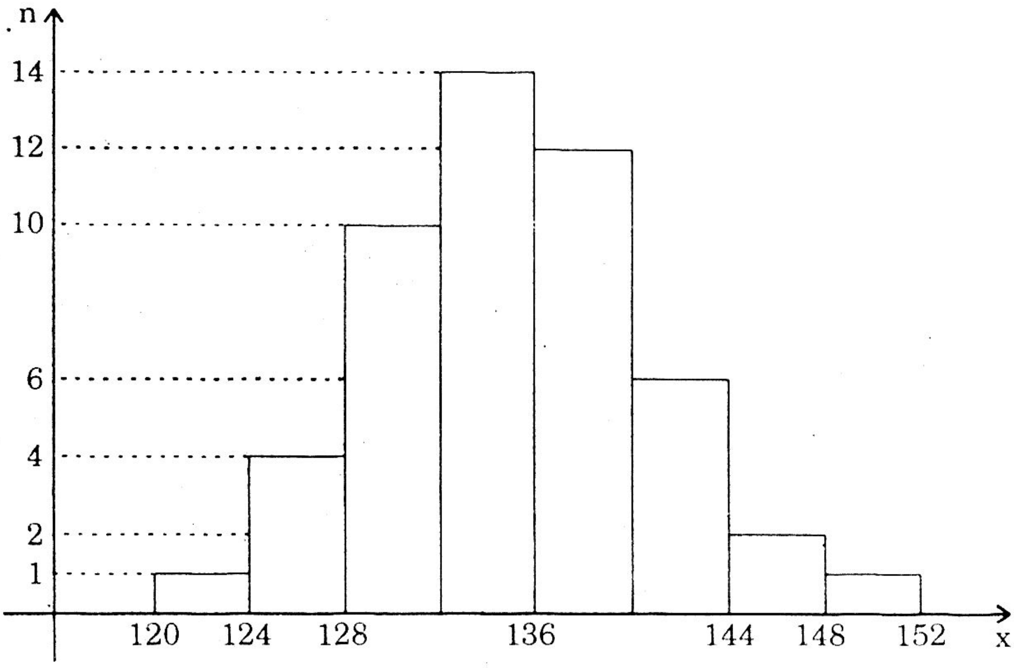
b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật tần số và đường gấp khúc tần số của bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp.

Hướng dẫn

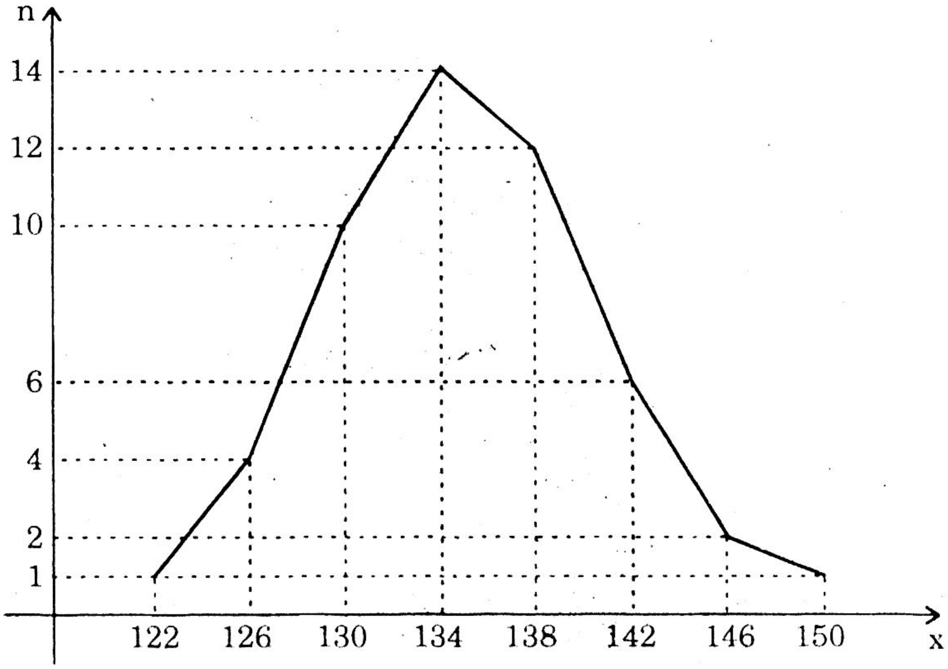
a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất :

	Các lớp	Giá trị đại diện	Tần số	Tần suất		
1	[12; 124)	122	1	$\frac{1}{50}$	(2%)	
2	[124; 128)	126	4	$\frac{4}{50}$	(8%)	
3	[128; 132)	130	10	$\frac{10}{50}$	(20%)	
4	[132; 136)	134	14	$\frac{14}{50}$	(28%)	
5	[136; 140)	138	12	$\frac{12}{50}$	(24%)	
6	[140; 144)	142	6	$\frac{6}{50}$	(12%)	
7	[144; 148)	146	2	$\frac{2}{50}$	(4%)	
8	[148; 152]	150	1	$\frac{1}{50}$	(2%)	$\sum n_i = 50$

b) Biểu đồ hình chữ nhật của bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp :



Đường gấp khúc (còn gọi là đa giác tần số) tần số ghép lớp :



Ghi chú : Đơn vị dài của trục nằm ngang và trục đứng có thể khô bằng nhau.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

5.3. Chọn ngẫu nhiên một số học sinh tại trường trung học cơ sở và c nặng của các học sinh đó (tính tròn kg) cho trong bảng :

39	39	38	41	42	40	41	39	43	43
38	40	37	41	40	41	38	42	43	39
40	41	42	39	37	42	41	40	38	41

a) Dấu hiệu ở đây là gì ? Kích thước của mẫu là bao nhiêu ? Dãy số liệu có bao nhiêu giá trị khác nhau ?

b) Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc của mẫu số liệu.

c) Vẽ đồ thị hình cột của bảng phân phối.

5.4. Số sinh viên đến thực tập tại một công ty trong vòng 6 tháng được cho trong bảng sau :

59	70	79	73	79	55	71	67	61	69	61	59	75	71	67
69	61	59	75	71	67	61	59	85	90	87	54	56	85	54
76	77	68	77	79	64	59	67	54	57	75	69	66	60	74
64	74	66	86	75	59	71	72	76	69	59	61	64	71	72

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp với các lớp [54; 58), [58; 52), [62; 66), ..., [86; 90].

b) Vẽ biểu đồ hình chữ nhật và vẽ đa giác tần số của bảng phân phối.

§2. Các số đặc trưng

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Số trung bình cộng (số trung bình)

+ *Giả sử dấu hiệu X có phân phối thực nghiệm rời rạc*

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k	
n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k	$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

Số ***trung bình cộng*** *của mẫu của dấu hiệu X kí hiệu là $\overline{X}$ được tính theo công thức :*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_ix_i + \ldots + n_kx_k)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i$$

+ *Nếu dấu hiệu X có phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp thì trong công thức trên ta thay giá trị x_i bằng giá trị đại diện x_i^0 của lớp thứ i.*

2. Mốt

Trong bảng phân phối thực nghiệm tần số, giá trị Mo có tần số lớn nhất thì ta gọi Mo là ***mốt*** *của mẫu. Nếu trong bảng phân phối có* *nhiều giá trị có tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì ta nói bảng phân phối là* ***đa mốt.***

3. Số trung vị

Một mẫu số liệu cỡ n được sắp các giá trị theo thứ tự không giảm $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$ *: Ta gọi là số trung vị, kí hiệu : Me*

$$Me = \begin{cases} x_{k+1} & \text{nếu } n = 2k+1 \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} & \text{nếu } n = 2k \end{cases}$$

4. Phương sai

Ta gọi là phương sai của mẫu số liệu về dấu hiệu X, kí hiệu là S_X^2 *, là số được xác định bởi :*

$$S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$$

Trong đó $\bar{x}$ *là số trung bình cộng của mẫu số liệu.*

5. Độ lệch chuẩn

Ta gọi là độ lệch chuẩn của mẫu số liệu của dấu hiệu X là căn bậc hai số học của phương sai của nó :

$$S_X = \sqrt{S_k^2}\,.$$

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

5.5. Điểm kiểm tra một tiết môn văn (thang điểm 10) một lớp 10 PTTH được cho bởi dãy số liệu sau :

5	5	5	3	7	4	5	4	8
4	6	4	4	3	5	7	5	4
5	4	6	5	6	5	6	5	5
6	4	6	5	5	4	4	6	7
5	7	5	6	8	6	3	6	3

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm *tần số* (rời rạc) của mẫu.

b) Tìm mốt, số trung bình cộng của mẫu.

c) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

a) Ta thấy kích thước của mẫu là 45. Bảng phân phối thực nghiệm như sau :

xi	3	4	5	6	7	8
n_i	4	10	15	10	4	2

$\sum n_i = 45$

b) Giá trị (điểm) 5 có tần số lớn nhất là 15.

Vậy mốt của dãy số liệu là $Mo = 5$.

Số trung bình cộng mẫu là :

$$\overline{x} = \frac{1}{45}[4.3 + 10.4 + 15.5 + 10.6 + 4.7 + 2.8] = \frac{213}{45} \approx 5,13$$

c) Để tính phương sai ta sử dụng công thức

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i - \overline{x}^2$$

$$= \frac{1}{45}[4.3^2 + 10.4^2 + 15.5^2 + 10.6^2 + 4.7^2 + 2.8^2] - \left(\frac{231}{45}\right)^2 = \frac{1255}{45} - \left(\frac{231}{45}\right)^2$$

$\approx 1,54$.

Độ lệch chuẩn : $s = \sqrt{S_X^2} \approx 1,24$

Để tính số trung bình cộng, phương sai và độ lệch chuẩn ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi. Chẳng hạn máy Casio fx 500MS ta nhấn các nút như sau :

Bước 1 : Vào chế độ tính thống kê, ta ấn : $\boxed{\text{MODE}}\,\boxed{2}$

Bước 2 : Xóa các dữ liệu lưu trong máy, ta ấn :

$\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{CLR}}\,\boxed{1}\,\boxed{=}$

Bước 3 : Nhập số liệu, ta ấn : $\boxed{3}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{;}\,\boxed{4}\,\boxed{\text{DT}}\,\boxed{4}\,\boxed{\text{SHIFT}}$

$\boxed{;}\,\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{\text{DT}}\,\boxed{5}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{;}\,\boxed{1}\,\boxed{5}\,\boxed{\text{DT}}\,\boxed{6}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{;}\,\boxed{1}$

$\boxed{0}\,\boxed{\text{DT}}\,\boxed{7}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{;}\,\boxed{4}\,\boxed{\text{DT}}\,\boxed{8}\,\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{;}\,\boxed{2}\,\boxed{\text{DT}}$

Bước 4 :

+ Tính số trung bình cộng ta ấn : $\boxed{\text{SHIFT}}\,\boxed{\text{S - VAR}}\,\boxed{1}\,\boxed{=}$

Máy hiện ra trên màn hình : 5.13333...3.

Làm tròn với 2 số thập phân ta được số trung bình $\overline{x} \approx 5,13$

+ Tính độ lệch chuẩn, ta ấn $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{S - VAR}}$ $\boxed{2}$

Máy hiện ra 1,240071683.

Làm tròn ta có độ lệch chuẩn S ≈ 1,24

Muốn có phương sai ta nhấn tiếp $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$

Máy hiện ra 1,53777778

Làm tròn ta có phương sai $S^2 \approx 1,54$.

5.6. Theo dõi trọng lượng của trẻ sơ sinh tại một bệnh viện trong một tuần lễ người ta được bảng số liệu sau :

Nhóm	Trọng lượng (kg)	Số em trong nhóm
1	[2,0 – 2,3)	5
2	[2,3 – 2,6)	13
3	[2,6 – 2,9)	25
4	[2,9 – 3,2)	35
5	[3,2 – 3,5)	30
6	[3,5 – 3,8)	20
7	[3,8 – 4,1)	16
8	[4,1 – 4,4)	6

Hãy tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn

Để tính giá trị trung bình theo bảng số liệu đã ghép lớp ta cần xác định giá trị đại diện của các nhóm. Ta viết lại bảng số liệu có giá trị trung tâm :

Nhóm	Trọng lượng	Giá trị đại diện	Tần số
1	[2,0 – 2,3)	2,15	5
2	[2,3 – 2,6)	2,45	13
3	[2,6 – 2,9)	2,75	25
4	[2,9 – 3,2)	3,05	35
5	[3,2 – 3,5)	3,35	30
6	[3,5 – 3,8)	3,65	20
7	[3,8 – 4,1)	3,95	16
8	[4,1 – 4,4)	4,25	6

Giá trị trung bình :

$$\bar{x} = \frac{1}{150}[5 \times 2{,}15 + 13 \times 2{,}45 + 25 \times 2{,}75 + 35 \times 3{,}05 + 30 \times 3{,}35 +$$

$$+ 20 \times 3{,}65 + 16 \times 3{,}95 + 6 \times 4{,}25] = 3{,}202$$

Phương sai :

$$S_X^2 = \frac{1}{150}[5 \times 2{,}15^2 + 13 \times 2{,}45^2 + \ldots + 16 \times 3{,}95^2 + 6 \times 4{,}25^2] - \bar{x}^2$$

$$\approx 0{,}260$$

Độ lệch chuẩn : $S_X = \sqrt{S_X^2} \approx 0{,}510$

5.7. Kết quả nhảy cao của một nhóm vận động viên (đơn vị cm) được cho như sau :

133 127 145 140 153 145 165 137

Tìm số trung bình, số trung vị, mốt và độ lệch chuẩn của mẫu.

Hướng dẫn

a) Số trung bình

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(133 + 127 + 145 + 140 + 153 + 145 + 165 + 137)$$

$$= 143{,}125.$$

b) Phương sai

$$S^2 = \frac{1}{8}(133^2 + 127^2 + 2.145^2 + 140^2 + 153^2 + 165^2 + 137^2) - \bar{x}^2$$

$$\approx 124{,}11$$

Độ lệch chuẩn : $S = \sqrt{S^2} \approx 11{,}14$

c) Để tìm mốt ta cần lập bảng phân phối tần số :

x	127	133	137	140	145	153	165
n_i	1	1	1	1	2	1	1

– Vậy mốt của dãy là : $Mo = 145$

Để tìm trung vị, ta sắp dãy số liệu theo thứ tự không giảm như sau :

127, 133, 137, 140, 145, 145, 153, 165

– Số trung vị : $Me = \dfrac{140 + 145}{2} = 142{,}5.$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

5.8. Số cân nặng (tính bằng kilôgam) của 60 em học sinh của một trường mẫu giáo ở thành phố A được ghi lại trong bảng sau :

17	20	20	18	19	19	18	21	18	21
18	19	18	19	19	17	19	20	17	21
18	19	18	17	19	16	19	19	17	18
18	18	17	18	16	17	20	19	21	19
19	18	16	17	16	17	20	18	16	18
18	16	16	20	19	17	16	19	24	17

a) Lập bảng phân phối tần số rời rạc và tìm mốt của mẫu.

b) Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn.

5.9. Điểm kiểm tra (thang điểm 100) của một nhóm học viên được thống kê trong bảng sau :

58	60	75	72	68	39	41	54	50	72
75	72	61	50	65					

a) Tìm số trung bình, mốt và trung vị.

b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

5.10. Tại một trại nuôi tôm, trong kì thu hoạch người ta đo chiều dài (tính bằng mm) của một mẻ tôm và được bảng số liệu sau :

49	52	51	54	45	54	59	54	48	40	56	49	59	42	43
55	51	53	44	47	51	45	50	42	51	53	57	50	50	51
57	50	51	48	46	47	51	51	57	52	48	56	50	47	53
42	55	53	50	49	52	48	51	60	48	56	57	51	49	61
43	50	47	54											

a) Lập bảng phân phối tần số ghép lớp với các lớp

$$[40; 44), [44; 48), [48; 52), \ldots, [60; 64].$$

b) Tìm số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu.

Chương VI

GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Góc và cung lượng giác

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Đơn vị đo góc và cung tròn

a) Độ : *Một độ, kí hiệu 1^0 là số đo của góc bằng $\frac{1}{180}$ góc bẹt.*

Nói khác đi, góc bẹt có số đo bằng 180^0.

Một độ bằng 60 phút ($1^0 = 60'$)

Một phút bằng 60 giây ($1' = 60''$)

***Số đo của một cung tròn là số đo của góc ở tâm chắn cung đó.** Như vậy, số đo của nửa đường tròn bằng 180^0.*

b) Radian :

*Một Radian, kí hiệu **1 rad** là số đo của một cung tròn có độ dài bằng bán kính đường tròn chứa cung ấy.*

c) Công thức quy đổi đơn vị đo :

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\,rad\ ; \qquad 1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0.$$

d) Độ dài cung tròn

Cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn có bán kính R ta kí hiệu là $l_{\overset{\frown}{AB}}$

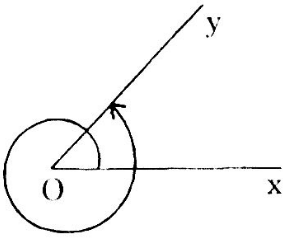
$$Sd\,\overset{\frown}{AB} = a^0 \quad \Rightarrow \quad l_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R a^0}{180}$$

$$Sd\,\overset{\frown}{AB} = \alpha\,(rad) \quad \Rightarrow \quad l_{\overset{\frown}{AB}} = R\alpha.$$

2. Góc và cung lượng giác

a) Góc lượng giác :

*Quy ước chiều ngược chiều kim đồng hồ là chiều dương. Kí hiệu (Ox, Oy) chỉ góc lượng giác tạo thành bằng cách quay quanh O theo một chiều nhất định từ tia Ox **(tia đầu)** đến tia Oy **(tia cuối)**.*

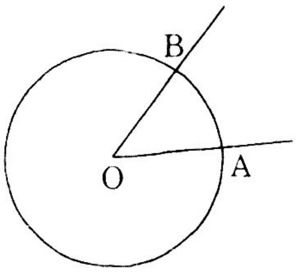


Hai góc lượng giác có chung tia đầu và tia cuối có số đo khác nhau một bội nguyên của 360^0 (hay của 2π). Ta viết

$$(Ox, Oy) = a^0 + k360^0 \quad \text{hay} \quad (Ox, Oy) = \alpha + k2\pi,\ k \in Z$$

trong đó a^0 là số đo tính bằng độ (hay α rad) là số đo của một trong các góc có tia đầu Ox, tia cuối Oy.

b) Cung lượng giác



Kí hiệu $\overset{\curvearrowright}{AB}$ để chỉ cung lượng giác được tạo thành từ điểm M chạy trên đường tròn định hướng tâm O theo một chiều nhất định từ ***điểm đầu** A đến **điểm cuối** B.*

$$Sđ\overset{\curvearrowright}{AB} = sđ(OA, OB)$$

Nếu không có sự lầm lẫn thì $\overset{\curvearrowright}{AB}$ cũng để chỉ số đo của cung $\overset{\curvearrowright}{AB}$.

Hai cung lượng giác có chung điểm đầu A và điểm cuối B có số đo khác nhau một bội nguyên của 360^0 (hay 2π).

$$\overset{\curvearrowright}{AB} = a^0 + k360^0 \quad \text{hay} \quad \overset{\curvearrowright}{AB} = \alpha + k2\pi,\ k \in Z.$$

3. Hệ thức Salơ

Cho 3 tia chung gốc bất kì OA, OB, OC thì

$$(OA,\ OB) + (OB, OC) = (OA, OC) + k360^0\,(k2\pi),\ k \in Z$$

Cho 3 điểm bất kì trên đường tròn định hướng là A, B, C thì

$$\overset{\curvearrowright}{AB} + \overset{\curvearrowright}{BC} = \overset{\curvearrowright}{AC} + k360^0\ (k2\pi),\ k \in Z$$

Các hệ thức trên là hệ thức Salơ.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

6.1. Đổi thành số đo bằng radian các góc có số đo bằng độ lần lượt là :

$$71^0.52',\quad 16^0.34'.$$

Hướng dẫn

+ Sử dụng công thức : $\alpha\ (\text{rad}) = a^0.\left(\frac{\pi}{180}\right)$

Góc có số đo $71^052'$ có số đo bằng radian là

$$71^052' = 71\frac{13}{15}^0 \times \frac{\pi}{180} = \frac{1088.\pi}{15.180} = \frac{539\pi}{1350} \approx 1,2543$$

Góc có số đo $16^034'$ có số đo bằng radian là

$$16^034' = 16\frac{17}{30}^0 = \frac{497}{30}.\frac{\pi}{80} = \frac{497}{5400}\pi \approx 0,2891$$

+ Sử dụng máy tính bỏ túi (ví dụ máy bỏ túi hiệu Casio fx 500MS) ta nhấn các nút như sau :

$\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{2}\ \boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{.,,,}\ \boxed{5}\ \boxed{2}\ \boxed{.,,,}$

$\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\text{DRG}}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

Trên máy hiện ra 1,254309956

Làm tròn với 4 số lẻ ta được $71^0 52' \approx 1{,}2543$ (rad)

6.2. Đổi ra số đo bằng độ các góc có số đo bằng radian lần lượt là : $\frac{3}{4}, \frac{4\pi}{9}$.

Hướng dẫn

+ Sử dụng công thức : $a^0 = \frac{180}{\pi}.\alpha$ (rad)

Ta có : $\frac{3}{4}(\text{rad}) = \left(\frac{180}{\pi}.\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{135^0}{\pi} \approx 42^0 58'18''$.

+ Sử dụng máy tính bỏ túi ta nhấn các nút

$\boxed{\text{ON}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{\text{MODE}}\ \boxed{1}\ \boxed{(}\ \boxed{3}\ \boxed{:}\ \boxed{4}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{SHIFT}}$

$\boxed{\text{DRG}}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{.,,,}$

Máy hiện ra : $42^0 58'18.6$

Làm tròn : $\frac{3}{4} \approx 42^0 58'18''$

Làm tương tự như trên ta được $\frac{4\pi}{9} = 80^0$.

6.3. Trên đường tròn có bán kính 10dm. Các cung có số đo theo thứ tự 1,5 (rad), 38^0. Tìm độ dài các cung đó.

Hướng dẫn

Độ dài cung 1,5 (rad) là : $l = R.\alpha = 10.1{,}5 = 15$dm

Độ dài cung 38^0 là :

$$l = \frac{\pi.Ra^0}{180} = \frac{\pi.10.38}{180} = \frac{19\pi}{9}\text{dm} \approx 6{,}63\text{dm}.$$

6.4. Cho đường tròn bán kính 8cm. Hãy tìm số đo bằng độ và radian các cung của đường tròn có độ dài.

a) 20cm. **b)** 31cm.

Hướng dẫn

a) Số đo của cung có độ dài 20cm là :

$$\alpha\ (\text{rad}) = \frac{l}{R} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

$$a^0 = \frac{l}{R}.\frac{180}{\pi} = \frac{20}{8}.\frac{180}{\pi} = \frac{450^0}{\pi} \approx 143^0 14'.$$

b) Đáp số : $\frac{31}{8}$ (rad) ≈ 3,875 (rad) hay $22^0 01'$.

6.5. Trên đường tròn lượng giác cho các cung có số đo theo thứ tự là

$$-60^0,\ -315^0,\ -1130^0,\ -\frac{180\pi}{7},\ \frac{11\pi}{3}.$$

Hỏi trong các cung trên, những cung nào có cùng điểm cuối ?

Hướng dẫn

Hai cung lượng giác có chung điểm gốc và điểm ngọn khi và chỉ khi chúng sai khác nhau bội 2π (bội 360^0).

Ta có : $-60^0 - (-315^0) = 255^0 \neq k.360^0,\ k \in Z$

$$-60^0 - (1130^0) = -3.360^0 - 110^0 \neq k360^0$$

$$-60^0 - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{180\pi}{7} \neq k2\pi$$

$$-60^0 - \frac{11\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - \frac{11\pi}{3} = -4\pi = -2.2\pi$$

$$-315^0 - 1130^0 = -4.360^0 - 45^0 \neq k360^0$$

$$1130^0 - \left(-\frac{180\pi}{7}\right) = 3.2\pi + \frac{5\pi}{18} + 13{,}2\pi - \frac{2\pi}{7} \neq k.2\pi.$$

Bằng cách tính hiệu số đo của từng cặp cung ta thấy chỉ có cung -60^0 và cung $\frac{11\pi}{3}$ là có chung điểm cuối vì chúng sai khác nhau bội 2π.

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

6.6 Đổi số đo theo đơn vị radian các góc có số đo :

$$25^0,\ 127^0 30',\ -480^0,\ 1845^0.$$

6.7. Đổi số đo theo đơn vị độ các góc có số đo bằng radian : 3,9; $\frac{3\pi}{16}$.

6.8. Cho góc lượng giác $(Ox; Oy) = 405^0 + k360^0$. Tìm tất cả các góc có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho và có số đo với giá trị tuyệt đối không quá 1200^0.

6.9. Trong mặt phẳng cho 4 tia chung gốc Ox, Oy, Oz, Ot. Biết Ot là tia phân giác của góc nhọn yOz. Chứng minh rằng :

$$2(Ox, Ot) = (Ox, Oy) + (Ox, Oz) + k360^0,\ k \in Z.$$

6.10. Cho đường tròn bán kính 15cm. Tính độ dài của các cung của đường tròn có số đo theo thứ tự là $\frac{5\pi}{8}$, 125^0.

6.11. Cho đường tròn đường kính 20cm. Tìm số đo bằng độ và rad các cung có độ dài lần lượt là 9cm, 37cm.

6.12. Sử dụng máy tính bỏ túi

a) Tìm số đo bằng độ góc có số đo bằng radian $\frac{5\pi}{17}$.

b) Tìm số đo bằng radian góc có số đo 82^0, 115^0.

6.13. Xác định điểm cuối của cung lượng giác $\overset{\curvearrowright}{AM}$ nằm trong góc phần tư nào của mặt phẳng tọa độ trong các trường hợp sau :

a) $\overset{\curvearrowright}{AM} = 1975^0 + k360^0$.

b) $\overset{\curvearrowright}{AM} = \frac{2006\pi}{19} + k2\pi$.

6.14. Cho hai điểm A, B trên đường tròn lượng giác với $\overset{\curvearrowright}{AB} = 120^0$. Tại cùng một thời điểm các điểm A, B cùng chuyển động theo chiều dương với tốc độ khác nhau. Một phút A vạch nên một cung 45^0, B vạch nên cung 60^0. Hỏi trong bao lâu A và B trùng nhau lần đầu tiên.

6.15. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng. Nếu đồng hồ chạy bình thường thì sau bao nhiêu lâu lần đầu tiên kim giờ OG và kim phút OP tạo thành góc lượng giác $(OG, OP) = 180^0$.

§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

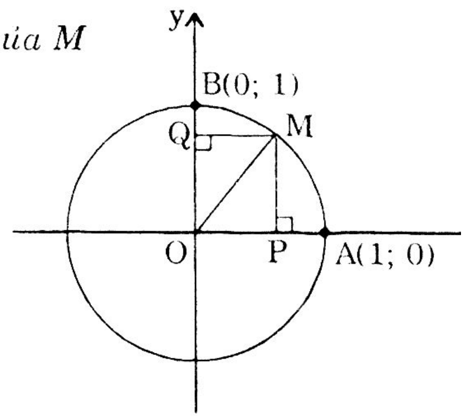
A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Các giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

*Trên **đường tròn lượng giác** lấy điểm M. Đặt (OA, OM) = α*

+ *Ta gọi là **sin của góc** α, kí hiệu **sinα** là tung độ của M*

$$\sin\alpha = \overline{OQ}$$



+ ***cosin của góc** α, kí hiệu **cosα** là hoành độ của M*

$$\cos\alpha = \overline{OP}$$

+ *Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ được gọi là* ***tang của góc** α, kí hiệu **tanα***

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0)$$

+ *Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ được gọi là **cotang của góc** α, kí hiệu **cotα***

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

*Các giá trị sinα, cosα, tanα, cotα được gọi là các **giá trị lượng giác củ** **góc α**. Vì sđ(OA, OM) = sđ$\overset{\frown}{AM}$ nên ta cũng gọi các giá trị trên là **cá** **giá trị lượng giác của cung α***

Từ định nghĩa ta suy ra, với mọi $k \in Z$ thì :

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha$ hay $\sin(\alpha + k360^0) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$ $\quad\cos(\alpha + k360^0) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ $\quad\tan(\alpha + k180^0) = \tan\alpha$

$\cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$ $\quad\cot(\alpha + k180^0) = \cot\alpha$

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

1) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$ $\qquad$ 2) $\tan\alpha.\cot\alpha = 1 \quad (\alpha \neq k\dfrac{\pi}{2},\ k \in Z).$

3) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z).$

4) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi,\ k \in Z).$

3. Giá trị lượng giác của các góc (cung) liên quan đặc biệt

a) Góc đối nhau

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad \cot(-\alpha) = -\cot\alpha.$

b) Góc (cung) bù nhau

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad (\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha)$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\qquad (\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha)$

$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$ $\qquad (\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha)$

$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$ $\qquad (\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha).$

*c) **Góc (cung) hơn π***

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ $\quad$ $(\sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha)$

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $(\cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha)$

$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$ $\quad$ $(\tan(180^0 + \alpha) = \tan\alpha)$

$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$ $\quad$ $(\cot(180^0 + \alpha) = \cot\alpha)$.

d) Góc (cung) phụ nhau

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ $\quad$ $(\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha)$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$ $\quad$ $(\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha)$

$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot\alpha$ $\quad$ $(\tan(90^0 - \alpha) = \cot\alpha)$

$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan\alpha$ $\quad$ $(\cot(90^0 - \alpha) = \tan\alpha)$.

B. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

6.16. Tìm các giá trị lượng giác của các góc cho sau đây bằng cách đưa về tìm giá trị lượng giác của các góc đặc biệt (mà không dùng bảng và máy tính) : -60, 135^0, 1050^0, $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$.

Hướng dẫn

Trước hết cần nhớ các giá trị lượng giác của các góc đặc biệt sau đây (nhất là các góc 30^0, 45^0, 60^0, 90^0)

Góc α	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
GTLG	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tanα	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	KXĐ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

Ta có : + $\sin(-60^0) = -\sin 60^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-60) = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$

+ $\sin 1050^0 = \sin(-30^0 + 3.360^0) = \sin(-30^0) = -\sin 30^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 1050^0 = \cos(-30^0) = \cos(30^0) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 1050^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

+ $\sin\dfrac{11\pi}{3} = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3} + 4\pi\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\dfrac{11\pi}{3} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$

+ $\sin\dfrac{17\pi}{6} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\cos\dfrac{17\pi}{6} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\dfrac{17\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

6.17. Tính giá trị của các biểu thức

a) $A = \cos 10^0 + \cos 20^0 + \cos 30^0 + \ldots + \cos 180^0$ (18 số hạng).

b) $B = \cos^2 10^0 + \cos^2 20^0 + \ldots + \cos^2 80^0 + \cos^2 90^0$ (9 số hạng).

Hướng dẫn

a) Sử dụng công thức giá trị lượng giác của các góc bù nhau, ta có

$$A = (\cos 10^0 + \cos 170^0) + (\cos 20^0 + \cos 160^0) + \ldots + (\cos 80^0 + \cos 100^0) + \cos 90^0 + \cos 180^0$$

$$= -1 + (\cos 10^0 - \cos 10^0) + (\cos 20^0 - \cos 20^0) + \ldots = -1.$$

b) $B = (\cos^2 10^0 + \cos^2 80^0) + (\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0) + \ldots + \cos^2 90^0$

$= (\cos^2 10^0 + \sin^2 10^0) + (\cos^2 20^0 + \sin^2 20^0) + \ldots = 4$

6.18. Tính các giá trị lượng giác của góc α, biết :

a) $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

b) $\sin\alpha = -\dfrac{9}{41}$ với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Hướng dẫn

Để tìm các giá trị lượng giác một góc cần tìm cách đưa về tìm giá trị lượng giác của các góc có số đo thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và xác định dấu của các giá trị lượng giác của góc có tia cuối thuộc các góc phần tư khác nhau của mặt phẳng tọa độ.

GTLG \ Phần tư	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

a) Từ điều kiện $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, tức tia cuối thuộc góc II thì $\sin\alpha > 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{4}{3}, \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = -\frac{3}{4}.$$

b) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{9}{41}\right)^2} = \frac{40}{41}; \quad \tan\alpha = -\frac{9}{41}; \quad \cot\alpha = -\frac{41}{9}.$$

6.19. Chứng minh công thức giá trị lượng giác của các góc hơn, kém $\frac{\pi}{2}$.

a) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$.　　**b)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$.

c) $\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$.　　**d)** $\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan x$.

Áp dụng : Tìm giá trị lượng giác của các góc 5160^0, $\frac{172\pi}{6}$.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ (sin của hai góc bù)

$= \cos x$ (hai góc phụ nhau).

b) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x.$

c) $\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x.$

d) $\cot\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{-\cot x} = -\tan x.$

Áp dụng : $5160^0 = 120^0 + 14 \times 360^0$

$$\Rightarrow \quad \sin 5160^0 = \sin 120^0 = \sin(90^0 + 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 5160^0 = \cos 120^0 = \cos(90^0 + 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 5160^0 = -\sqrt{3}\,; \qquad \cot 5160^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tương tự : $\dfrac{172\pi}{6} = \dfrac{4\pi}{6} + 14.2\pi = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6} + 14.2\pi$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{172\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{172\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}; \qquad \mathrm{tg}\frac{172\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

6.20. Rút gọn biểu thức :

a) $A = \cos\left(\frac{11\pi}{2}-x\right) + \sin\left(x-\frac{15\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right).$

b) $B = \sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) - \sin\left(\frac{9\pi}{2}+x\right).$

Hướng dẫn

a) $A = \cos\left(4\pi+\pi+\frac{\pi}{2}-x\right) + \sin\left(x-\frac{\pi}{2}+\pi-8\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}+x+2\pi\right) +$

$$+ \cos\left(-\frac{\pi}{2}-x+2\pi\right)$$

$$= -\sin x + \cos x + \cos x - \sin x = 2(\cos x - \sin x).$$

b) Đáp số : 2sinx.

6.21. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin^6x + \cos^6x + 3\sin^2x\cos^2x = 1 \qquad (1)$

b) $\dfrac{\sin^2x - \cos^2x + \cos^4x}{\cos^2x - \sin^2x + \sin^4x} = \tan^4x \qquad (2)$

Hướng dẫn

a) $\text{VT}(1) = (\sin^2x)^3 + (\cos^2x)^3 + 3\sin^2x\cos^2x$

$$= (\sin^2x + \cos^2x)[\sin^4x - \sin^2x\cos^2x + \cos^4x] + 3\sin^2x\cos^2x$$

$$= (\sin^2x + \cos^2x)^2 - 3\sin^2x\cos^2x + 3\sin^2x\cos^2x = 1.$$

b) $\text{VT}(2) = \dfrac{\sin^2x - \cos^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x - \sin^2x(1-\sin^2x)} = \dfrac{\sin^2x - \cos^2x\sin^2x}{\cos^2x - \sin^2x\cos^2x}$

$$= \frac{\sin^2x(1-\cos^2x)}{\cos^2x(1-\sin^2x)} = \frac{\sin^2x.\sin^2x}{\cos^2x.\cos^2x} = \frac{\sin^4x}{\cos^4x} = \tan^4x.$$

6.22. Chứng tỏ các biểu thức sau đây có giá trị không phụ thuộc vào x.

a) $A = \cos^4x + \cos^2x\sin^2x + \sin^2x.$

b) $B = (1 - \sin^2x)\cot^2x - \sin^2x - \cot^2x + 2.$

Hướng dẫn

a) $A = \cos^4x + \cos^2x(1 - \cos^2x) + 1 - \cos^2x$

$= \cos^2x(\cos^2x + 1 - \cos^2x) + 1 - \cos^2x = 1$ không phụ thuộc x.

b) $B = \cot^2x - \sin^2x\cot^2x - \sin^2x - \cot^2x + 2$

$= -\sin^2x\dfrac{\cos^2x}{\sin^2x} - \sin^2x + 2 = 1$ không phụ thuộc x.

6.22. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \sin^3x + \cos^3x$, biết $\sin x + \cos x = \dfrac{4}{3}$.

b) $B = \sin^4x - \cos^4x$, biết $\tan x = m$.

Hướng dẫn

a) $A = (\sin x + \cos x)(\cos^2x + \sin^2x - \sin x\cos x) = \dfrac{4}{3}(1 - \sin x\cos x)$

Mặt khác : $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x = \dfrac{16}{9}$

$$\Rightarrow \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{9} - 1\right] = \frac{7}{18} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{7}{18}\right) = \frac{22}{27}.$$

b) $B = (\sin^2x + \cos^2x)(\sin^2x - \cos^2x) = 1 - 2\cos^2x$

$$= 1 - \frac{2}{1+\tan^2x} = 1 - \frac{2}{1+m^2} = \frac{m^2-1}{m^2+1}.$$

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

6.24. Tìm giá trị lượng giác của các góc sau đây bằng cách đưa về tìm giá trị lượng giác các góc dương không quá 90^0 :

$$-225^0,\ -150^0,\ 510^0,\ \frac{21\pi}{4},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{29\pi}{6}.$$

6.25. Tìm các giá trị lượng giác của góc x biết :

a) $\sin x = \frac{12}{13}$ $\quad 90^0 < x < 180^0$. **b)** $\cos x = -\frac{8}{17}$ $\quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan x = 3$ $\quad \pi < x < \frac{3\pi}{2}$. **d)** $\cot x = -2$ $\quad 270^0 < x < 360^0$.

6.26. Tìm các giá trị lượng giác của góc x, biết $0 < x < 90^0$ và $\tan x - \cot x = 1$.

6.27. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \tan^2 x + \cot^2 x$, biết $\tan x + \cot x = 3$.

b) $B = |\tan x - \cot x|$, biết $\tan x + \cot x = m$.

c) $C = \sin^4 x + 3\cos^4 x$, biết $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$.

6.28. Rút gọn biểu thức :

a) $A = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi - x)$.

b) $B = \cot(7\pi - x) + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) + \tan(5\pi + x)$.

c) $C = \cos\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$.

d) $D = \cos(990^0 + x) + \sin(810^0 - x) + \cos(450^0 + x) + \cos(720^0 - x)$.

6.29. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \cos 4455^0 - \cos 945^0 + \tan 1035^0 + \cot 1500^0$.

b) $B = \dfrac{\cos 36^0 \sin 594^0}{\sin 144^0 - \cos 486^0}.\cot 234^0$.

6.30. Chứng minh các hệ thức :

a) $\dfrac{1 + \cot x}{1 - \cot x} = \dfrac{\tan x + 1}{\tan x - 1}$. **b)** $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} = \sin^2 x \cos^2 x$.

c) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$.

d) $\dfrac{\sin x + \cos x - 1}{1 - \cos x} = \dfrac{2\cos x}{\sin x + 1 - \cos x}$.

6.31. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\dfrac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1} = \dfrac{2}{3}$. **b)** $\dfrac{\sin^2 x - \tan^2 x}{\cos^2 x - \cot^2 x} = \tan^6 x$.

c) $\dfrac{1}{1 - \sin x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$.

6.32. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a) $A = \dfrac{1 - 2\sin^2 x}{2\cos^2 x - 1}$. **b)** $B = \cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x$.

c) $C = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

d) $D = \dfrac{\sin^4 x + 3\cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x + 3\cos^4 x - 1}$.

6.33. Tính giá trị của biểu thức : $A = \dfrac{8\cos^3 x - 2\sin^3 x + \cos x}{2\cos x - \sin^3 x}$.

6.34. Biết $\tan x = 2$, $\cos x\sin x = m$. Tính giá trị của các biểu thức sau :

a) $A = \sin x + \cos x$. **b)** $B = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6.35. Tính giá trị của biểu thức :

a) $A = \dfrac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$, biết $0 < x < 90^0$, $\sin x = \dfrac{1}{3}$.

b) $B = \dfrac{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 2\cos x}{2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 4\cos^2 x}$, biết $\cot x = -3$.

§3. Một số công thức lượng giác

A. KIẾN THỨC CĂN BẢN

1. Công thức cộng

$$\cos(a - b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \quad (1)$$

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \quad (2)$$

$$\sin(a - b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \quad (3)$$

$$\sin(a + b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \quad (4)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b} \quad (5)$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b} \quad (6)$$

$$\cot(a - b) = \frac{1 + \cot a\cot b}{\cot a - \cot b} \quad (7)$$

$$\cot(a + b) = \frac{\cot a\cot b - 1}{\cot a + \cot b} \quad (8)$$

2. Công thức nhân đôi

Trong các công thức (2), (4), (6), (8) cho b = a ta được :

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 \tag{9}$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \tag{10}$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a} \tag{11}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a} \tag{12}$$

3. Công thức hạ bậc :

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \tag{13}$$

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2} \tag{14}$$

4. Công thức tính sina, cosa, tana theo tan $\frac{a}{2}$

Đặt $\tan\frac{a}{2} = t$ *ta có :*

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \tag{15}$$

$$\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{16}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} \tag{17}$$

5. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)] \tag{18}$$

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)] \tag{19}$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)] \tag{20}$$

6. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{21}$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{22}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{23}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \tag{24}$$

3. CÁC VÍ DỤ GIẢI TOÁN

.36. Không dùng bảng lượng giác và máy tính, hãy tìm các giá trị lượng giác của các góc 75^0, 105^0.

Hướng dẫn

a) Ta có : $75^0 = 45^0 + 30^0$

$$\cos75^0 = \cos(45^0 + 30^0) = \cos45^0\cos30^0 - \sin45^0\sin30^0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin75^0 = \sin45^0\cos30^0 + \sin30^0\cos45^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan75^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}\ ; \qquad \cot75^0 = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}\ .$$

b) $\sin105^0 = \sin(90^0 + 45^0) = \sin90^0\cos15^0 + \cos90^0\sin15^0$

$$= 1.\cos15^0 = 1.\sin75^0 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Hoặc áp dụng công thức giá trị lượng giác của các góc bù nhau :

$$\sin105^0 = \sin(180^0 - 75^0) = \sin75^0$$

Suy ra : $\cos 105^0 = -\cos75^0 = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

$$\tan105^0 = -\tan75^0 = -(2 = \sqrt{3}\ ); \qquad \cot75^0 = -2 + \sqrt{3}\ .$$

.37. Không dùng bảng và máy tính, hãy tìm các giá trị lượng giác của các góc $7^030'$.

Hướng dẫn

Ta có : $7^030' = \dfrac{15^0}{2}$. Áp dụng công thức hạ bậc :

$$\sin7^030' = \sqrt{\frac{1 - \cos 15^0}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sin 75^0}{2}}$$

Thay $\sin75^0 = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ ta được : $\sin7^030' = \sqrt{\dfrac{4 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}}$

$$\cos7^030' = \sqrt{\frac{1 + \sin 75^0}{2}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}}$$

Từ đó tính $\tan7^030'$ và $\cot7^030'$.

6.38. Cho biết $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. Tính các giá trị lượng giác của các góc 36^0, 9^0.

Hướng dẫn

a) $\cos 18^0 = \sqrt{1-\sin^2 18^0} = \sqrt{1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

$\sin 36^0 = 2\sin 18^0\cos 18^0 = 2\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

$\cos 36^0 = \cos^2 18^0 - \sin^2 18^0 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} - \dfrac{3-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

b) Áp dụng công thức hạ bậc ta được :

$$\sin 9^0 = \sqrt{\frac{1-\cos 18^0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)}$$

$$\cos 9^0 = \sqrt{\frac{1+\cos 18^0}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\right)}.$$

6.39. a) Cho biết $\tan(a+b) = m$, $\tan(a-b) = n$. Tính $\tan 2a$ và $\tan 2b$.

b) Tính $\tan 37^0 30'$, $\tan 7^0 30'$.

Hướng dẫn

a) $\tan 2a = \tan[(a+b)+(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)+\tan(a-b)}{1-\tan(a+b)\tan(a-b)} = \dfrac{m+n}{1-mn}$

$\tan 2b = \tan[(a+b)-(a-b)] = \dfrac{\tan(a+b)-\tan(a-b)}{1+\tan(a+b)\tan(a-b)} = \dfrac{m-n}{1+mn}$.

b) $\tan 75^0 = \tan(45^0+30^0) = \dfrac{\tan 45^0+\tan 30^0}{1-\tan 45^0\tan 30^0} = \dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2+\sqrt{3}$

$\tan 15^0 = \dfrac{\tan 45^0-\tan 30^0}{1+\tan 45^0\tan 30^0} = \dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = 2-\sqrt{3}$.

Đặt $t = \tan 37^0 30'$ thì $\tan 75^0 = \dfrac{2t}{1-t^2} = 2+\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad (2+\sqrt{3})t^2 + 2t - (2+\sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{-1+\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}}{2+\sqrt{3}}$

$$\tan 37^\circ 30' = \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}-1}{2+\sqrt{3}}$$

Tính tương tự ta có : $\tan 7^\circ 30' = \dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}-1}{2-\sqrt{3}}$.

.40. Rút gọn biểu thức :

a) $A = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}}}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

b) $B = \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}} - \sqrt{2}$ với $0 < x < \pi$.

Hướng dẫn

a) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x} = \frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} \quad \left(\text{vì } \cos\frac{x}{2} > 0\right)$

$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}} = \cos\frac{x}{8}$.

b) $B = \frac{1}{\sin x}\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin x\,|\sin x|} - \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin x\,|\sin x|} - 1\right)$

Vì $0 < x < \pi$ nên $\sin x > 0$, $|\sin x| = \sin x$

nên $B = \sqrt{2}\left(\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\right) = \sqrt{2}\cot^2 x$.

.41. Chứng minh các hệ thức :

a) $\cos^3 x\sin x - \sin^3 x\cos x = \frac{1}{4}\sin 4x$ (1)

b) $\frac{\sin(x+y+z)}{\cos x\cos y\cos z} = \tan x + \tan y + \tan z - \tan x\tan y\tan z$ (2)

với $x, y, z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn

a) $\text{VT (1)} = \cos x\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x = \frac{1}{4}\sin 4x = \text{VP}$.

b) $\sin(x+y+z) = \sin[(x+y)+z] = \sin(x+y)\cos z + \sin z\cos(x+y)$

$= (\sin x\cos y + \sin y\cos x)\cos z + \sin z(\cos x\cos y - \sin x\sin y)$

$= \sin x\cos y\cos z + \sin y\cos x\cos z + \sin z\cos x\cos y - \sin x\sin y\sin z$.

Theo giả thiết x, y, z $\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ nên $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$, $\cos z \neq 0$.

Chia hai vế cho cosxcosycosz ta được (2).

Nếu x, y, z là các góc của một tam giác không vuông thì vế trái bằng ($\sin(x + y + z) = \sin\pi = 0$) ta được hệ thức :

$$\tan x + \tan y + \tan y = \tan x\tan y\tan z.$$

6.42. Chứng minh trong tam giác ABC ta có hệ thức :

a) $\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$ (

b) $\cot A\cot B + \cot B\cot C + \cot C\cot A = 1$ (

Hướng dẫn

a) Ta có : $A + B + C = \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

$$\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cot\frac{C}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{C}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad ($$

b) Ta có : $A + B = \pi - C \quad \Leftrightarrow \quad \cot(A + B) = \cot(\pi - C) = -\cot C$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tan(A+B)} = -\frac{1}{\tan C} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1 - \tan A\tan B)\tan C}{\tan A + \tan B} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{\cot A}.\frac{1}{\cot B}\right)\frac{1}{\cot C} = -\frac{1}{\cot A} - \frac{1}{\cot B}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cot A\cot B - 1 = -\cot B\cot C - \cot A\cot C \quad \Leftrightarrow \quad (2)$$

6.43. Chứng minh các công thức nhân ba :

a) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. **b)** $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

c) $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

Hướng dẫn

a) $\sin 3x = \sin[2x + x] = \sin 2x\cos x + \sin x\cos 2x = 2\sin x\cos^2 x + \sin x\cos^2 x - \sin$

$= 3\sin x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

b) $\cos 3x = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x = (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin^2 x\cos x$

$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

c) Chứng minh tương tự a), b).

6.44. Không dùng bảng và máy tính hãy tìm các giá trị lượng giác của g 36^0, 18^0.

Hướng dẫn

a) Ta có : $\sin 108^0 = \sin 72^0 \Leftrightarrow \sin(3.36^0) = \sin(2.36^0)$

$\Leftrightarrow 3.\sin 36^0 - 4\sin^3 36^0 = 2\sin 36^0\cos 36^0$

Do $\sin 36^0 \neq 0$ nên chia hai vế đẳng thức cho $\sin 36^0$ ta được

$3 - 4\sin^2 36^0 = 2\cos 36^0 \Leftrightarrow 3 - 4(1 - \cos^2 36^0) = 2\cos 36^0$

$\Leftrightarrow 4\cos^2 36^0 - 2\cos 36^0 - 1 = 0$

$$\Rightarrow \cos 36^0 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 36^0 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

b) $\sin 18^0 = \sqrt{\dfrac{1-\cos 36^0}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$; $\cos 18^0 = \sqrt{\dfrac{1+\cos 36^0}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$.

6.45. Chứng minh : **a)** Nếu $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $\sin x < \cos x$ (1)

b) Nếu $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ thì $\sin x > \cos x$ (2)

Hướng dẫn

a) Ta có : $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Nếu $0 < x < \frac{\pi}{4}$ thì $-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} < 0$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Do đó $\sin x - \cos x < 0$. Suy ra $\sin x < \cos x$.

b) Nếu $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ thì $0 < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}$, $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$

Do đó $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, suy ra $\sin x > \cos x$.

6.46. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh bất đẳng thức

$$\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \qquad (1)$$

Hướng dẫn

VT (1) dương, do đó (1) $\Leftrightarrow \left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)^2 \geq 3$

$$\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2} + \tan^2\frac{B}{2} + \tan^2\frac{C}{2} + 2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right) \geq 3$$

Theo kết quả bài 6.42 : $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

Ta có : $(1)\Leftrightarrow \tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geq 1$ (2)

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cô – si ta có :

$$\text{VT }(2)=\frac{1}{2}\left[\left(\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}\right)+\left(\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\right)+\left(\tan^2\frac{C}{2}+\tan^2\frac{A}{2}\right)\right]$$

$$\geq\frac{1}{2}\left[2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+2\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right]=1$$

Vậy (2) đúng, do đó (1) đúng.

6.47. Gọi A, B, C là các góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là :

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}-(\cot A+\cot B+\cot C)=\sqrt{3} \qquad (1)$$

Hướng dẫn

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1-\cos A}{\sin A}+\frac{1-\cos B}{\sin B}+\frac{1-\cos C}{\sin C}=\sqrt{3}\quad\Leftrightarrow\quad\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}+2\left(\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}\right)=$$

Từ kết quả bài 6.42 : $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

Suy ra :

$$(1)\Leftrightarrow\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)^2\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}=\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{A}{2}=\tan\frac{B}{2}=\tan\frac{C}{2}\quad\Leftrightarrow\quad A=B=C\quad\Leftrightarrow\quad\Delta ABC\text{ đều.}$$

6.48. Cho tam giác ABC có cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C theo thứ tự là a, b, c, có diện tích là S. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2}$ (1)

b) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \dfrac{2S}{R^2}$ (2)

c) $a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C = \dfrac{2S}{R}$ (3)

Hướng dẫn

a) Theo định lí hàm sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = a.\frac{\sin B}{\sin A},\quad c = a.\frac{\sin C}{\sin A}$$

Thay vào vế phải (1) ta có :

$$\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} = \frac{a(\sin B - \sin C)}{a.\sin A}\cos\frac{A}{2} = \frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}\cdot\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B-C}{2}.$$

b) Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích ở vế trái ta được :

$$(\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C = 2\sin(A+B).\cos(A-B) + 2\sin C.\cos C$$

Vì $\sin(A + B) = \sin(\pi - C) = \sin C$ nên

$$VT\ (2) = 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C] = 2\sin C[\cos(A-B) + \cos(\pi - (A+B))]$$

$$= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] = 4\sin C.\sin A.\sin B$$

$$= 4\frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}.\frac{2}{R^2} = \frac{2S}{R^2}.$$

c) Áp dụng định lí hàm sin cho vế trái (3), ta được :

$$a.\cos A + b.\cos B + c.\cos C = 2R.\sin A.\cos A + 2R.\sin B.\cos B + 2R.\sin C.\cos C$$

$$= R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = R.\frac{2S}{R^2} = \frac{2S}{R}.$$

6.49. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}$.

b) $B = \dfrac{\cos 3x - \cos 5x}{\cos 3x + \cos 5x} - \dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x}$.

Hướng dẫn

a) Áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích cho tử và mẫu thức của A, ta được :

$$A = \frac{(\cos x + \cos 4x) + (\cos 2x + \cos 3x)}{(\sin x + \sin 4x) + (\sin 2x + \sin 3x)}$$

$$= \frac{2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2} + 2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \cot\frac{5x}{2}.$$

b) Thực hiện tương tự câu a) :

$$B = \frac{-2\sin 4x\sin(-x)}{2\cos 4x\cos x} - \frac{-2\sin 3x\sin(-x)}{2\cos 3x\cos x}$$

$$= \tan x[\tan 4x - \tan 3x| = \tan x.\frac{\sin x}{\cos 4x\cos 3x}.$$

6.50. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\frac{1}{\sin 10^0} - 4\sin 70^0 = 2.$ **b)** $\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Hướng dẫn

a) Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta được :

$$VT = \frac{1 - 4\sin 10^0\sin 70^0}{\sin 10^0} = \frac{1 + 2(\cos 80^0 - \cos 60^0)}{\sin 10^0}$$

$$= \frac{2\cos 80^0}{\sin 10^0} = \frac{2\sin 10^0}{\sin 10^0} = 2.$$

b) Tương tự câu a) :

$$VT = \sin 20^0.\frac{1}{2}[\cos(80^0 - 40^0) - \cos(80^0 + 40^0)|$$

$$= \frac{1}{2}\sin 20^0\left(\cos 40^0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin 20^0\left(\frac{3}{2} - 2\sin^2 20^0\right)$$

$$= \frac{1}{4}(3\sin 20^0 - 4\sin^3 20^0) = \frac{1}{4}\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

(theo công thức góc nhân ba được chứng minh trong bài 6.43).

C. BÀI TẬP TỰ GIẢI

6.51. Không dùng bảng số liệu và máy tính, tìm giá trị lượng giác của các góc $22^0 30'$, $11^0 15'$.

6.52. Cho $\sin x = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Tìm các giá trị lượng giác của góc 2x.

6.53. Cho $90^0 < x < 135^0$ và $\sin 2x = -\frac{4}{5}$. Tìm các giá trị lượng giác của góc x.

6.54. Không dùng bảng và máy tính, hãy tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0}$. **b)** $B = \sin 15^0 + \tan 30^0 \cos 15^0$.

c) $C = \dfrac{\cot 225^0 - \cot 79^0 \cot 71^0}{\cot 259^0 + \cot 251^0}$.

6.55. Chứng minh các hệ thức :

a) $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = \tan^2 \dfrac{x}{2}$. **b)** $\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \dfrac{1}{\cos 2x} - \tan 2x$.

c) $\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0$.

d) $\dfrac{2\sin 2x - \sin 4x}{2\sin 2x + \sin 3x} = \tan^2 x$.

6.56. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\tan x \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x$.

b) $4\cos x \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \cos 3x$.

c) $4\sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \sin 3x$.

6.57. Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc x

a) $A = \cos^2 x - \sin(30^0 + x)\sin(30^0 - x)$.

b) $B = \sin^2 x + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right)$.

c) $C = 4\cos^4 x - 2\cos 2x - \dfrac{1}{2}\cos 4x$.

6.58. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có hệ thức :

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

6.59. Tính giá trị của các biểu thức :

a) $A = \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7}$.

b) $B = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7} + \cos\dfrac{5\pi}{7}$. **c)** $C = \cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}$.

6.60. Cho $\sin x = 2\sin(x + y)$. Chứng minh : $\mathrm{tg}(x + y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$.

6.61. Cho x, y là hai góc nhọn thỏa mãn các điều kiện

$$\begin{cases} 3\sin 2x - 2\sin 2y = 0 & (1) \\ 3\sin^2 x + 2\sin^2 y = 1 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh $x + 2y = \dfrac{\pi}{2}$.

6.62. Cho $\sin y = \sin x\cos(x + y)$. Chứng minh $2\tan x = \tan(x + y)$.

6.63. Cho $\cos(x + y) = 2\cos(x - y)$. Chứng minh $\tan x\tan y = -\dfrac{1}{3}$.

6.64. Rút gọn các biểu thức :

a) $A = \dfrac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$ **b)** $B = \dfrac{\sin 4x + \sin 5x + \sin 6x}{\cos 4x + \cos 5x + \cos 6x}$.

6.65. Chứng minh rằng trong các tam giác ABC bất kì ta có các hệ thức :

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

6.66. Tính giá trị các biểu thức :

a) $A = \cos 10^0\cos 50^0\cos 70^0$. **b)** $B = \cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG VI

6.67. Biểu thị qua sinx và cosx các biểu thức sau :

a) $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(5\pi + x) + \sin(101\pi + x)$.

b) $B = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\dfrac{7\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \dfrac{11\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \dfrac{7\pi}{2}\right)$

6.68. Tính giá trị của các biểu thức (không dùng máy tính)

a) $A = \cos\dfrac{\pi}{10} + \cos\dfrac{2\pi}{10} + \ldots + \cos\dfrac{9\pi}{10}$.

b) $B = \cos^2\dfrac{\pi}{3} + \cos^2\dfrac{5\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{9} + \cos^2\dfrac{11\pi}{18} + \cos^2\dfrac{13\pi}{18} + \cos^2\dfrac{2\pi}{9}$.

6.69. Cho $\tan x + \cot x = 3$ với $0 < x < \dfrac{\pi}{8}$. Tìm các giá trị lượng giác của các góc 2x, 4x.

6.70. Đơn giản các biểu thức :

a) $A = \dfrac{\cos 18^0 \cos 28^0 + \cos 108^0 \sin 208^0}{\sin 34^0 \sin 146^0 + \sin 236^0 \sin 304^0}$.

b) $B = \dfrac{1 + \tan x \tan y}{1 - \tan x \tan y}$.

c) $C = \tan x \tan y + (\tan x + \tan y)\cot(x + y)$.

d) $D = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} - \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos 2x}}$ với $0^0 < x < 90^0$.

6.71. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ $\forall x$. **b)** $\sin x - \cos x = -\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

c) $(\tan x + \tan y)\cot(x + y) + (\tan x - \tan y)\cot(x - y) = 2$.

d) $(\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0) +$

$+ (\cos 40^0 + \cos 160^0)(\cos 320^0 - \cos 380^0) = 1$.

6.72. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a) $A = 2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$.

b) $B = \cos^2 x - 2\cos a.\cos x.\cos(a + x) + \cos^2(a + x)$.

c) $C = \cos^2 x - 2\sin a.\sin x.\sin(a + x) + \sin^2(a + x)$.

6.73. Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác. Chứng minh các hệ thức

a) $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} = \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} +$

$+ \cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

b) $\sin^2\dfrac{A}{2} + \sin^2\dfrac{B}{2} + \sin^2\dfrac{C}{2} = 1 - 2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

6.74. Rút gọn biểu thức : $A = \dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x}$.

6.75. Chứng minh các đẳng thức :

a) $\dfrac{1}{\sin 10^0} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^0} = 4$.

b) $\cos 5x.\cos 3x + \sin 7x.\sin x = \cos 2x.\cos 4x$.

6.76. Chứng minh trong tam giác ABC, ta có :

a) $b.\cos B + c.\cos C = a.\cos(B - C)$.

b) Nếu $\sin A = \dfrac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ thì tam giác ABC vuông tại A.

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. Chọn phương án đúng trong các phương án nêu ra :

Trong các câu cho dưới đây, có bao nhiêu câu là mệnh đề lôgic :

1. 2014 chia hết cho 4;
2. $3x + 2$ là một số chẵn;
3. Ngày chủ nhật vừa rồi bạn có đi tắm biển không ?
4. Bức tranh này đẹp quá !

a) 4 câu; **b)** 3câu; **c)** 2 câu; **d)** 1 câu.

2. Cho các tập hợp : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 7\}$; $C = (2; 6)$

a) Xác định các tập hợp : $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$.

b) Xác định các số a, b, c sao cho $[a; b] \subset A \cap B \cap C$.

3. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \sqrt{3 - x} + \dfrac{1}{x^2 - 1}$. **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x - 5}{10 - x}}$.

c) $y = \sqrt{2x + 9} - \sqrt{\dfrac{x - 2}{3x^2 + 7x - 10}}$.

4. Xét sự biến thiên của hàm số trên khoảng cho tương ứng :

a) $y = 3|2x - 5|$ trên $(-\infty; 0)$.

b) $y = -3x^2 + 6x + 2$ trên $(-\infty; 1)$.

c) $y = \dfrac{x + 3}{x - 2}$ trên $(2; +\infty)$.

5. Xác định giá trị của k để các đường thẳng sau đây đồng quy :

$y = x + 5$; $y = -x + 1$; $y = kx + 2$.

6. Trong mỗi trường hợp sau đây hãy xác định giá trị của a, b, c để parabol $y = ax^2 + bx + c$.

a) Đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua điểm $A(0; 6)$.

b) Đi qua các điểm $A(1; 3)$, $B(-2; 3)$, $C(-1; -1)$.

7. Xác định các số a, b, c biết rằng parabol $y = ax^2 + bx + c$ nhận được bằng cách tịnh tiến parabol $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ theo phương trục tung lên trên 3 đơn vị để được parabol (P_1). Sau đó tịnh tiến (P_1) theo phương trục hoành sang bên trái 2 đơn vị.

8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2|x - 1|$. Dựa trên đồ thị của hàm số hãy xác định các giá trị của x để $y < 0$.

9. Vẽ đồ thị của hàm số : $y = |x - 2| - |x + 2|$

Dựa vào đồ thị của hàm số hãy giải và biện luận theo m phương trình $|x - 2| = m + |x + 2|$.

10. Giải và biện luận theo tham số m

a) $m(x - m) + 2 = x + m$. **b)** $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$.

11. Trong mỗi trường hợp dưới đây, hãy tìm giá trị của tham số m và tìm nghiệm còn lại, biết một nghiệm ghi kèm theo

a) $mx^2 - 2(m + 3) + m + 1 = 0$ $\quad x_1 = 2$

b) $(m - 1)x^2 + (2 - m)x - 1 = 0$ $\quad x_1 = -1$.

12. Cho phương trình với tham số m : $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$

a) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm.

b) Xác định giá trị của m để phương trình có hai nghiệm và tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

13. Giải và biện luận theo tham số m các phương trình :

a) $x^2 - 4x + m + 1$. **b)** $(m + 1)x^2 - (m + 2)x + m - 3 = 0$

14. Cho phương trình : $x^2 + 2(m + 3)x + m^2 - 4 = 0$

a) Hãy xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Trong trường hợp có nghiệm, hãy xác định m để biểu thức :

$A = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

15. Giải và biện luận phương trình theo tham số m

a) $\dfrac{(m + 1)x + m - 2}{x + 3} = m$. **b)** $|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2$.

16. Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình

a) $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} (m + 4)x - (m + 2)y = 4 \\ (2m - 1)x + (m - 4)y = m \end{cases}$

17. Giải các hệ phương trình bậc hai hai ẩn

a) $\begin{cases} (x - y)^2 = 49 \\ 3x + 4y = 84 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + xy + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

18. Chứng minh các bất đẳng thức :

a) $(a + b)(ab + 1) \geq 4ab$ với mọi $a > 0, b > 0$.

b) $\dfrac{a + bc^4}{2c^2} \geq \sqrt{ab}$ với mọi $a, b, c > 0$.

19.a) Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x-1}$ với $x > 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x+5} + \sqrt{3-x}$ với $-5 \le x \le 3$.

20. Giải và biện luận bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất theo tham số m

a) $(m^2 + 1)x + m \ge 2x - 1$. **b)** $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{7} < x + 3 \\ m(mx-5) > x - 5 \end{cases}$

21. Trong mỗi trường hợp dưới đây, tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt

a) $(m+1)x^2 - (2m-1)x - m = 0$. **b)** $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 = 0$.

22. Tìm các giá trị của m để mọi $x \in R$ đều là nghiệm của bất phương trình

a) $x^2 + (m+1)x - 3m + 1 > 0$.

b) $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 2 < 0$.

23. Xác định giá trị của m để phương trình $(m+3)x^2 - 3(m-1)x + 4m = 0$ có một nghiệm nằm trong khoảng $(-2; 2)$, còn nghiệm kia nằm ngoà đoạn $[-2; 2]$.

24. Giải các phương trình và bất phương trình :

a) $\sqrt{5x+10} = 8 - x$. **b)** $|x^2 - 8x + 7| = 2x - 9$.

c) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} > x - 2$.

25.a) Cho $\tan x = 2$, $0 < x < 90^0$. Tính các giá trị lượng giác của góc 2x.

b) Cho $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $\sin x = \dfrac{5}{13}$. Tính các giá trị lượng giác của góc $\dfrac{x}{2}$.

26. Chứng minh các biểu thức sau đây có giá trị không phụ thuộc x

a) $A = 1 + \sin 2x - \sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) $B = \cos^2 x + \cos^2(x+a) - 2\cos x.\cos a.\cos(x+a)$.

27. Cho A, B, C là các góc của tam giác ABC và $T = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$

Chứng minh rằng $T = 2 + 2\cos A.\cos B.\cos C$

Từ đó suy ra rằng $T > 2$ nếu ABC là tam giác nhọn, $T = 2$ nếu tam giác ABC vuông và $T < 2$ nếu ABC là tam giác có một góc tù.

28. Cho $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$. Chứng minh $\tan\dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{\tan x + \tan y}{2}$.

PHẦN II

LỜI GIẢI – HƯỚNG DẪN, TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chương I. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

§1. Mệnh đề

1.6. **b)**

1.7. **a)** ABCD không phải là hình bình hành.

b) π là số vô tỉ.

c) Thổ Nhĩ Kì là một nước không thuộc châu Âu.

d) Khu phố A có ít nhất một em trên 6 tuổi mà không đi học.

1.8. **a)** $A \Rightarrow B$: "Nếu tam giác MNP vuông thì nó có một trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng." Mệnh đề đúng.

b) Nếu ABCD là hình vuông thì nó có hai đường chéo vuông góc. Mệnh đề đúng.

c) $A \Rightarrow B$: "Nếu $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ thì $\sqrt{3}$ là số vô tỉ". A sai, B đúng.

$A \Rightarrow B$ đúng. (vì mệnh đề $A \Rightarrow B$ chỉ sai khi A đúng, B sai).

d) $A \Rightarrow B$: "Nếu $\sqrt{2}$ là số vô tỉ thì $\sqrt{3}$ là số hữu tỉ". Mệnh đề sai (vì A đúng, B sai).

1.9. **a)** $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n$. **b)** $\exists x \in \mathbb{Q} : 16x^2 - 1 = 0$.

c) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3$. **d)** $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 0$.

1.10. **a)** $\exists n \in \mathbb{N}^* : n^2 - 1 \not\vdots\ 3$. Có số nguyên dương n sao cho $n^2 - 1$ không chia hết cho 3.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \vdots\ 3$. Số $n^2 + 1$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.

c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 \leq 0$. Có số thực x sao cho $x^2 + x + 1$ không dương.

d) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1 \not\vdots\ 4$. Số $n^2 + 1$ không chia hết cho 4 với mọi n tự nhiên.

§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học

1.19. **a)** Mệnh đề đảo : "Một tam giác có một góc bằng tổng hai góc còn lại là tam giác vuông". Mệnh đề này đúng. Đó là định lí đảo của định lí đã nêu.

b) Mệnh đề đảo : "Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc là một hình thoi". Mệnh đề này sai, do đó nó không phải là định lí đảo của định lí đã nêu.

c) Mệnh đề đảo : "Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là một hình bình hành". Mệnh đề này đúng, do đó nó là định lí đảo của định lí đã nêu.

1.20. a) Điều kiện cần để một tứ giác là hình chữ nhật là nó có hai đường chéo bằng nhau.

b) Điều kiện cần để một tam giác là tam giác cân là có một đường trung tuyến đồng thời là đường cao của tam giác.

1.21. a) Điều kiện đủ để tổng các chữ số một số tự nhiên chia hết cho 9 là số ấy chia hết cho 9.

b) Điều kiện đủ để hai đường thẳng trong mặt phẳng song song với nhau là chúng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba.

1.22. a) Định lí đảo : "Một tam giác có hai đường trung tuyến bằng nhau là tam giác cân". Cả định lí thuận và đảo được phát biểu thành : "Điều kiện cần và đủ để một tam giác là cân là nó có hai đường trung tuyến bằng nhau".

b) Định lí đảo : "Một tam giác có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng là tam giác vuông". Định lí thuận và đảo : "Điều kiện cần và đủ để một tam giác có một góc vuông là có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng".

1.23. a) Giả sử ΔABC không đều và không có góc nào nhỏ hơn 60^0. Không giảm tính tổng quát ta có thể viết : $A \geq B > C \geq 60^0$. Khi đó $A + B + C > 180^0$. Điều này mâu thuẫn với định lí : Tổng số góc của một tam giác bằng 180^0. Vậy ΔABC phải có ít nhất một góc nhỏ hơn 60^0.

b) Giả sử trong mặt phẳng có các đường thẳng d_1, d_2, d_3 với $d_1 \parallel d_3$, $d_2 \parallel d_3$ và d_1 không song song với d_2. Khi đó d_1 cắt d_2 tại điểm A. Như vậy qua một điểm A kẻ được hai đường thẳng song song với d_3. Điều này trái với tiên đề Ơclit. Vậy ta phải có $d_1 \parallel d_2$.

c) Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng. Nhân vế với vế các bất đẳng thức đó ta được :

$$a(2-b).b(2-c).c(2-a) = [a(2-a)][b(2-b)][c(2-c)] > 1$$

Mặt khác ta có :

$$(a-1)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 2a - a^2 = a(2-a)$$

Tương tự ta có $1 \geq b(2-b)$, $1 \geq c(2-c)$.

Do đó : $[a(2-a)][b(2-b)][c(2-c)] \leq 1$

Điều này mâu thuẫn với kết quả trên. Vậy có ít nhất một trong ba bất đẳng thức là sai.

1.24. **a)** *Bước 1 :* Với $n = 0$ thì $0^3 + 3.0^2 + 5.0 + 3$ chia hết cho 3. Mệnh đề đúng với $n = 0$.

Bước 2 : Giả sử mệnh đề đúng với $n = k$, tức là ta có

$$B(k) = k^3 + 3k^2 + 5k + 3 \,\vdots\, 3$$

Khi đó
$$\begin{aligned} B(k+1) &= (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1) + 3 \\ &= [k^3 + 3k^2 + 5k + 3] + 3k^2 + 9k + 9 \\ &= B(k) + 3(k^2 + 3k + 3) \,\vdots\, 3 \end{aligned}$$

tức là mệnh đề đúng với $n = k + 1$.

Kết luận : Mệnh đề đúng với mọi $n \in \mathbb{N}$.

b) *Bước 1 :* Với $n = 1$ ta có : $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4}$, đẳng thức đúng với $n = 1$

Bước 2 : Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, tức là ta có :

$$C(k) = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Khi đó với $n = k + 1$ vế trái của đẳng thức có thể viết thành :

$$[1^3 + 2^3 + \dots + k^3] + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + k + 1\right] = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Kết luận : Đẳng thức đúng với mọi n nguyên dương.

§3. Tập hợp và các phép toán trên tập hợp

1.34. $A \cup B = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 4; 6; 8\}$

$A \cap B = \{0; 2\}$

$A \setminus B = \{-4; -3; -2; -1; 1\}$

$B \setminus A = \{4; 6; 8\}$.

1.35. $C_E^A = \{5; 6; 7; 8; 9\}$; $C_E^B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$

$C_E^{(A \cup B)} = \{5; 7; 9\}$; $C_E^A \cap C_E^B = \{5; 7; 9\}$

1.36. (1) $\Rightarrow$ $4; 6; 9 \in A$ (4)

(2) $\Rightarrow$ $1; 6; 8; 9 \in A$ (5)

(4), (5) $\Rightarrow$ $\{1; 4; 6; 8; 9\} \subset A$ (6)

(1), (3) $\Rightarrow$ $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 9\} \subset B$ (7)

(1), (7) $\Rightarrow$ $2; 3; 5; 7 \notin A$ (8)

Từ giả thiết $A \subset E$, (6) và (8) suy ra $A = \{1; 4; 6; 8; 9\}$

Vì $1; 8 \in A$ nên từ (1) suy ra $1; 8 \notin B$ (9)

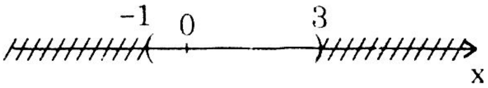
Từ $B \subset E$ và (9) suy ra $B = \{2; 3; 4; 5; 6, 7; 9\}$.

1.37. a) $\{x \in R \,/\, |x| > 3\} = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$

b) $B = (-5; 6) \setminus [1; 3] = (-5; 1) \cup (3; 6)$.

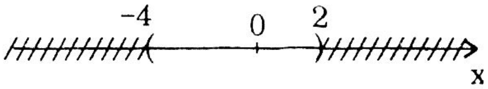
1.38. $|x - 1| < 2 \Leftrightarrow -2 < x - 1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

$A = (-1; 3)$

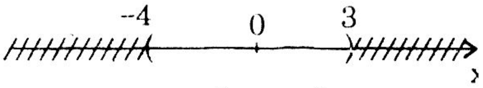


$|x + 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x + 1 < 3 \Leftrightarrow -4 < x < 2$

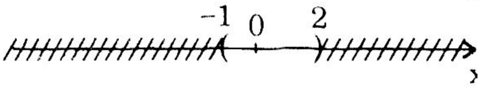
$B = (-4; 2)$



$\Rightarrow$ $A \cup B = (-4; 3)$



$A \cap B = (-1; 2)$.



1.39. Vì $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$ nên

$B \cup (A \setminus B) = A \Leftrightarrow A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

$\Leftrightarrow A \cap B = B$.

§4. Sai số, cách viết chuẩn số gần đúng

1.43. $\sqrt{5} = 2{,}236067978...$

$\frac{38}{17} = 2{,}235294118...$

$0 < \sqrt{5} - \frac{38}{17} < 2{,}2361 - 2{,}2352 = 0{,}0009.$

Sai số tuyệt đối không vượt quá 9.10^{-4}.

1.44. $\pi = 3{,}141592654\ldots$

$0 < 3{,}1416 - \pi < 3{,}1416 - 3{,}14159 = 0{,}00001$

Sai số tuyệt đối không vượt quá 10^{-5}. Do đó tất cả các chữ số của số 3,1416 đều là các chữ số chắc. Và đó là cách viết chuẩn của số π.

1.45. Sai số tuyệt đối của chu vi : $\Delta_C = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$cm.

Chu vi tam giác : $2p = 6{,}3 + 10 + 15 = 31{,}3 \pm 0{,}6$cm.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1.46. **a)** $\forall n \in N : n^2 + 1$ không chia hết cho 3. Mệnh đề đúng.

b) $\exists n \in N : n^2 + 1$ chia hết cho 4. Sai.

1.47. **a)** Giả sử tam giác có hai góc tù thì tổng các góc lớn hơn 180^0. Mâu thuẫn với định lí tổng các góc một tam giác bằng 180^0.

b) Giả sử hai số đều không âm thì tổng của chúng không âm, mâu thuẫn với giả thiết.

1.48. **a)** Điều kiện cần để hai tam giác bằng nhau là có diện tích bằng nhau.

b) Điều kiện cần để bình phương số tự nhiên n chia hết cho 3 là n chia hết cho 3.

1.49. Điều kiện cần và đủ để tam giác có một góc vuông là có một đường trung tuyến bằng nửa cạnh tương ứng..

1.50. $\{2; 4\}$, $\{2; 6\}$, $\{2; 8\}$, $\{4; 6\}$, $\{4; 8\}$, $\{6; 8\}$.

1.51. $C_A^B = \{3; 5; 7; 8\}$, $C_A^{(B \cup C)} = \{8\}$, $C_A^{(B \cap C)} = \{1; 3; 5; 6; 7; 8\}$.

1.52. **a)** $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} \geq 1 \Leftrightarrow m \geq 2.$

b) $A \setminus B \neq A \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \Leftrightarrow \dfrac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow m < 2.$

1.53. $A = \{x \in R \,/\, x - 1 < -3 \text{ hoặc } x - 1 > 3\} = (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$

$$B = \{x \in R \,/\, |x + 2| < \frac{1}{2}\} = \{x \in R \,/\, -\frac{1}{2} < x + 2 < \frac{1}{2}\} = \left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

$$A \cup B = (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (4; +\infty)$$

$$A \cap B = \left(-\frac{5}{2}; -2\right); \qquad A \setminus B = \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right] \cup (4; +\infty).$$

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC HAI

§1. Khái niệm hàm số

2.7. **a)** $D = \{x \in R / 2 - x \geq 0\} \cap \{x \in R / x - 1 > 0\} = (1; 2]$.

b) $D = \{x \in R / x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = R \setminus \{2; 3\}$.

c) $D = \{x \in R / (x - 3)(2x + 1) \geq 0\} = \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

d) $D = \{x \in R / \frac{x - 1}{x + 1} \geq 0\} = (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$.

2.8. **a)** $f(3) = 9$, $f(4) = 17$.

b) $A(7; 51)$, $C(5; 25 + \sqrt{2})$ thuộc đồ thị.

2.9. **a)** $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2} = 1 - \frac{(x - 1)^2}{x^2 + 2} = -\frac{1}{2} + \frac{(x + 2)^2}{2(x^2 + 2)}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $-\frac{1}{2}$ đạt được khi $x = -2$, giá trị lớ nhất bằng 1 đạt được khi $x = 1$.

b) Giá trị nhỏ nhất bằng -1, giá trị lớn nhất bằng 4.

2.10. **a)** $y = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$. GTNN $= -\frac{5}{4}$.

b) y đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sqrt{(x - 3)(5 - x)}$ đạt giá trị lớn nhất.

Vì $(x - 3) + (5 - x(= 2$ nên tích $(x - 3)(5 - x)$ có giá trị lớn nhất kl $x - 3 = 5 - x$, tức là với $x = 4$. Giá trị nhỏ nhất bằng 2 đạt được kl $x = 4$.

c) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 9} = \frac{1}{2} - \frac{11}{4x^2 + 8x + 18} = \frac{1}{2} - \frac{11}{4(x + 1)^2 + 14}$ đạt giá t nhỏ nhất khi $\frac{11}{4(x + 1)^2 + 14}$ đạt giá trị lớn nhất, bằng $\frac{11}{14}$ kl $x = -1$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $-\frac{2}{7}$.

d) Vì $\frac{1}{2}|x + 3| \geq 0 \ \forall x$ nên $\frac{1}{2}|x + 3| - 4 \geq -4 \ \forall x$

Giá trị nhỏ nhất $= -4$ đạt được khi $x = -3$.

2.11. **a)** chẵn; **b)** lẻ; **c)** chẵn; **d)** không chẵn, không lẻ.

2.12. **a)** Đặt $t = a + 2 \Rightarrow a = t - 2$.

$$f(t) = (t-2)^2 - 3(t-2) + 2 = t^2 - 7t + 12$$

Hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 12$.

b) $y = 2x^2 + x + 1$.

2.13. **a)** Đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx+2}{x+m-1}$ không cắt trục hoành nếu phương trình $\dfrac{mx+2}{x+m-1} = 0$ vô nghiệm. Điều này xảy ra khi $m = 0$ hoặc $m = -1$ hay $m = 2$.

b) $m = -\dfrac{1}{2}$.

c) Đồ thị không cắt trục tung khi với $x = 0$ biểu thức $y = \dfrac{mx+2}{x+m-1}$ vô nghĩa. Điều này xảy ra khi $m = 1$.

2.14. **a)** Từ giả thiết f(x), g(x) là các hàm số chẵn nên với $x \in A \Rightarrow -x \in A$ và $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x)$

Vậy h(x) là hàm số chẵn.

b) c) d) làm tương tự câu a).

2.15. Giả sử hàm $y = f(x)$ xác định trên D với $\forall x \in D, -x \in D$.

Đặt $g(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

Rõ ràng $f(x) = g(x) + h(x)$. Hơn nữa :

$$g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x) \Rightarrow g(x) \text{ là hàm số chẵn.}$$

$$h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -h(x)$$

Vậy h(x) là hàm số lẻ.

2.16. Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm thuộc mọi đồ thị của các hàm số với các giá trị tùy ý của m. Điều này có nghĩa là :

$$y_0 = mx_0^2 - (m-1)x_0 - 2m + 1 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \quad m\left(x_0^2 - x_0 - 2\right) + x_0 - y_0 + 1 = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \\ x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1;\ y_0 = 0 \\ x_0 = 2;\ y_0 = 3 \end{array}\right.$$

Vậy các điểm A(−1; 0) và B(2; 3) là các điểm thuộc mọi đồ thị vớ bất kì giá trị nào của m.

2.17. $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1} = x - 2 - \dfrac{2}{x - 1}$

$x_0 \in Z$ thì $y_0 = x_0 - 2 - \dfrac{2}{x_0 - 1} \in Z$ nếu $\dfrac{2}{x_0 - 1} \in Z$

Điều này xảy ra khi $x_0 - 1$ là ước của 2, tức là với $x_0 - 1 = \pm 1, \pm 2$ Suy ra các điểm đồ thị có tọa độ nguyên là (−1; −2), (0; 0), (2; −2) (3; 0).

2.18. Điểm $A(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{1 - x}$ cách đều cá trục tọa độ nếu

$$\begin{cases} y_0 = \dfrac{x_0^2 - 3x_0 + 3}{1 - x_0} \\ |y_0| = |x_0| \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{3}{2}, \ y_0 = -\frac{3}{2}$$

Vậy điểm $A\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ thuộc đồ thị và cách đều hai trục tọa độ.

2.19. $2x^2 - x + 2 = 2x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 1, x_2 = \dfrac{3}{2}$

Tọa độ các giao điểm hai đồ thị : A(1; 1), $B\left(\dfrac{3}{2}; 2\right)$.

2.20. a) Lấy $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$ với $x_1 < x_2$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(2x_1^2 - 4x_1 + 2) - (2x_2^2 - 4x_2 + 2)}{x_1 - x_2} = 2(x_1 + x_2) - 4 < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng (−∞; 1).

b) Đồng biến.

2.21. Đồng biến trên (0; 1) và (3; 4), nghịch biến trên (1; 3).

§2. Hàm số bậc nhất

2.26. Bạn tự vẽ.

2.27. a) Bạn tự vẽ.

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số f(x) và g(x) :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 4 = -x + 3 \Leftrightarrow x = \frac{7}{3}$$

Tọa độ giao điểm của hai đồ thị : $A\left(\frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

b) Ba đường thẳng đồng quy khi tọa độ A nghiệm đúng phương trình

$$y = 3x + k + 1,$$

nghĩa là : $\frac{2}{3} = 3.\frac{7}{3} + k + 1 \Leftrightarrow k = -\frac{22}{3}$.

2.28. a) Phương trình đường thẳng AB : $y = -5x + 7$.

b) $k = 9$.

2.29. a) $k = \frac{1}{2}$.

b) Hàm số đồng biến khi $\frac{2k-1}{k+2} > 0 \Leftrightarrow k < -2$ hoặc $k > \frac{1}{2}$.

2.30. Với $m \neq 1$, $m \neq -\frac{1}{2}$ thì $y = \frac{2m+1}{m-1}x + 2$

$$\Leftrightarrow (m-1)y = (2m+1)x + 2 \Leftrightarrow (2x - y)m + x + y + 2 = 0$$

Điểm $A(x_0; y_0)$ trên mặt phẳng tọa độ mà mọi đồ thị hàm số $y = \frac{2m+1}{m-1}x + 2$ luôn đi qua với mọi $m \neq 1$, $m \neq -\frac{1}{2}$ khi và chỉ khi

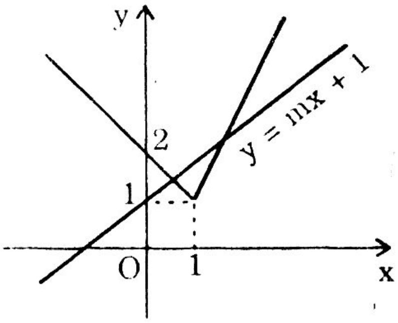
$$(2x_0 - y_0)m + x_0 + y_0 + 2 = 0 \text{ với mọi } m \neq 1, m \neq -\frac{1}{2}.$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x_0 - y_0 = 0 \\ x_0 + y_0 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{2}{3} \\ y_0 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy điểm $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ là điểm cần tìm.

2.31. Bạn đọc tự vẽ.

2.32. a) Đồ thị (xem hình bên).



b) Đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại hai điểm phân biệt nếu phương trình $mx + 1 = -x + 2$ (1) có nghiệm nhỏ hơn 1 và phương trình $mx + 1 = 2x - 1$ (2) có nghiệm lớn hơn 1.

Ta có : (1) $\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{1}{m+1} \quad (m \neq -1)$

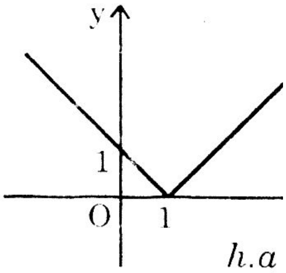
$$\frac{1}{m+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{m+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-m}{m+1} < 0$$

$$\Leftrightarrow m < -1 \text{ hoặc } m > 0.$$

$$(2) \Leftrightarrow x = \frac{2}{2-m}$$

$$\frac{2}{2-m} > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{2-m} - 1 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 2.$$

Vậy nếu $0 < m < 2$ thì đường thẳng $y = mx + 1$ cắt đồ thị $y = f$ tại hai điểm phân biệt.



h.a

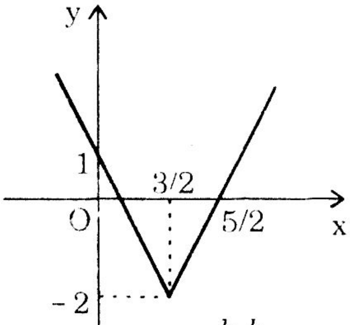
2.33. a) $y = |-x + 1| = \begin{cases} -x + 1 & \text{với } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{với } x > 1 \end{cases}$

Đồ thị : hình h.a

b) $y = |2x - 3| - 2$

$$= \begin{cases} -2x + 1 & \text{với } x \leq \dfrac{3}{2} \\ 2x - 5 & \text{với } x > \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Đồ thị hình h.b.



h.b

2.34. a) Lập bảng tìm biểu thức không chứa dấu giá trị tuyệt đối của hà số :

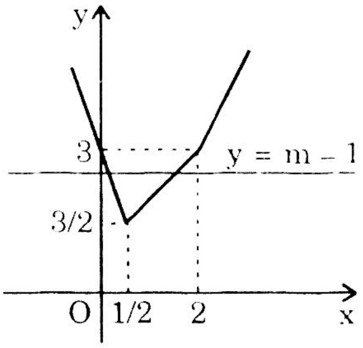
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$\lvert 2x - 1 \rvert$		$-2x + 1$	0	$2x - 1$		$2x - 1$	
$\lvert -x + 2 \rvert$		$-x + 2$		$-x + 2$	0	$x - 2$	
y		$-3x + 3$		$x + 1$		$3x - 3$	

Như vậy : $y = \begin{cases} -3x + 3 & \text{với } x \leq \dfrac{1}{2} \\ x + 1 & \text{với } \dfrac{1}{2} < x < 2 \\ 3x - 3 & \text{với } x \geq 2 \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = |2x - 1| + |-x + 2|$ như hình vẽ (trang sau).

b) $|2x-1|+|-x+2|-m+1=0 \Leftrightarrow |2x-1|+|-x+2|=m-1$

Vẽ đường thẳng $y = m - 1$ là đường thẳng song song với trục hoành. Đường thẳng $y = m - 1$ không cắt đồ thị hàm số $y = |2x-1|+|-x+2|$, tức là phương trình đã cho vô nghiệm nếu :



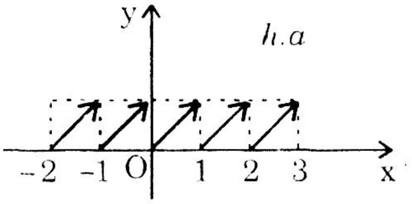
$$m - 1 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}$$

Phương trình có một nghiệm nếu $m = \frac{5}{2}$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt nếu $m > \frac{5}{2}$.

2.35. a) Ta có : $y = x - [x] = x - k$ với $k \le x < k + 1$ với mọi $x \in Z$.

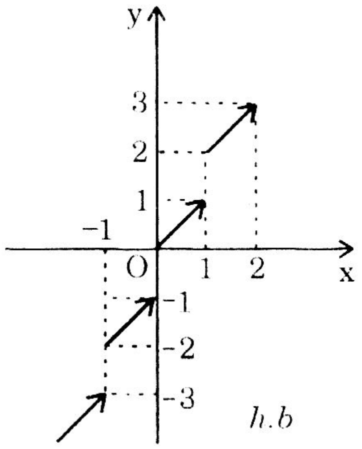
Đồ thị là các đoạn thẳng (không kể mút bên phải như hình bên) song song. Xem hình h.a.



b) $y = x + [x] = x + k$

với $k \le x < k + 1$ với mọi $k \in Z$.

Đồ thị xem hình h.b.



§3. Hàm số bậc hai

2.40. Bạn tự giải.

2.41. a) Đỉnh $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, giao điểm với trục tung : K(0; 6)

Giao điểm với trục hoành A(2; 0), B(3; 0).

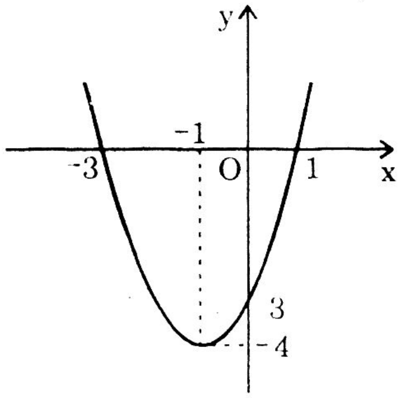
b) $I\left(\frac{1}{4}; -\frac{49}{8}\right)$, K(0; –6), $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, B(2; 0).

c) $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{25}{8}\right)$, K(0; –3), $A\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$, B(1; 0).

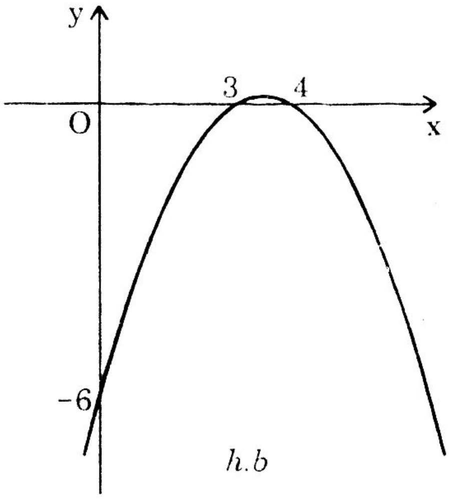
d) $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$, K(0; 1) không cắt trục hoành.

2.42. **a)** Đồ thị : hình h.a. Trên đồ thị ta thấy $f(x) \geq 0$ với $x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$.

b) Đồ thị : hình h.b. $f(x) \geq 0$ với $3 \leq x \leq 4$.



h.a



h.b

2.43. **a)** Ta có : $\begin{cases} -\dfrac{n}{2m} = 1 \\ \dfrac{-n^2}{4m} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 1, \quad n = -2.$

b) Thay tọa độ của A, B vào hệ thức $y = mx^2 + nx$ ta được :

$$\begin{cases} 0 = 4m + 2n \\ 6 = 9m + 3n \end{cases} \Leftrightarrow \quad m = 2, \quad n = -4.$$

2.44. **a)** $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 3 = 4a + 2b + c \\ \dfrac{9}{2} = a - b + c \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = \dfrac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 3.$

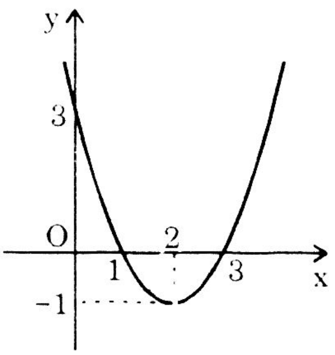
b) $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ \dfrac{4ac - b^2}{4a} = 6 \\ -3 = a - b + c \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = -1, \quad b = 4, \quad c = 2.$

2.45. $y = -\dfrac{1}{2}(x + 2)^2 + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{1}{2}$

Vậy $a = -\dfrac{1}{2}, \quad b = -2, \quad c = \dfrac{1}{2}.$

2.46. **a)** Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

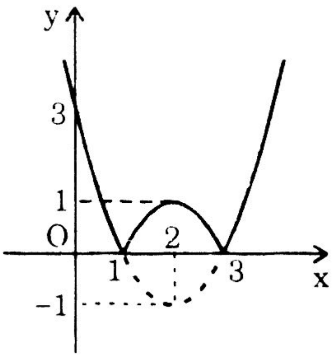


Đồ thị hình bên.

b) Ta có :

$$|x^2-4x+3| = \begin{cases} x^2-4x+3 \text{ nếu } x^2-4x+3 \ge 0 \\ -(x^2-4x+3) \text{ nếu } x^2-4x+3 < 0 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ trùng với phần đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ nằm trên trục hoành và hình đối xứng với trục hoành của phần đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ nằm dưới trục hoành. (Xem hình bên với đường liền nét trên trục hoành).

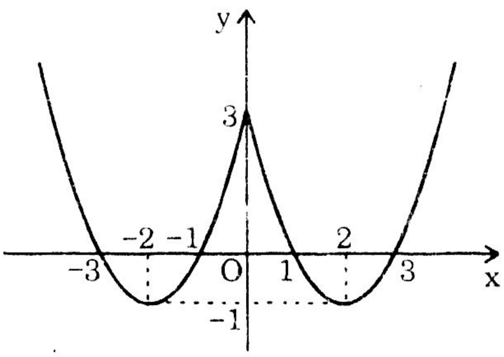


Qua đồ thị ta có thể lập lại bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$\|x^2-4x+3\|$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

c) Ta có : $x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} x^2+4x+3 \text{ với } x \le 0 \\ x^2-4x+3 \text{ với } x > 0 \end{cases}$

Hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$ là hàm số chẵn, có đồ thị trùng với phần đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ bên phải trục tung và hình đối xứng với trục tung của phần đồ thị bên phải trục tung của đồ thị $y = x^2 - 4x + 3$ (Xem hình bên)



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên sau :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x^2-4\|x\|+3$	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

2.47. **a)** $\mathbb{R} \setminus \left\{-1; -\dfrac{3}{2}\right\}$. **b)** $\left[2; \dfrac{7}{2}\right)$.

c) – Với $x < -1$ ta có :

$$|x+1| + |x-1| - 2 = -x - 1 - x + 1 - 2 = -2x - 2 > 0$$

– Với $-1 \le x \le 1$ ta có :

$$|x+1| + |x-1| - 2 = x + 1 - x + 1 - 2 = 0$$

– Với $x > 1$ ta có :

$$|x+1| + |x-1| - 2 = x + 1 + x - 1 - 2 = 2x - 2 > 0$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x}{|x+1| + |x-1| - 2}$ là

$$D = \mathbb{R} \setminus [-1; 1].$$

d) $\left(1; \dfrac{3}{2}\right]$.

2.48. $x + 2 - m = 0 \Leftrightarrow x = m - 2$

Hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+2-m}$ xác định với $x \in [0; 1]$ khi và chỉ khi

$m - 2 \notin [0; 1] \Leftrightarrow m - 2 < 0$ hoặc $m - 2 > 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus [2; 3]$.

2.49. **a)** Hàm số chẵn.

b) $x^2 + 2x \ge 0$ với $x \in \mathbb{R} \setminus (-2; 0)$

$x^2 - 2x \ge 0$ với $x \in \mathbb{R} \setminus (0; 2)$

Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ là

$$D = (\mathbb{R} \setminus (-2; 0)) \cap (\mathbb{R} \setminus (0; 2)) = (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [2; +\infty)$$

Rõ ràng : $x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x} = -f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1] \cup (-1; 1) \cup [1; +\infty) = \mathbb{R}$

$$x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = \begin{cases} -x^3 + 1 = -(x^3 - 1) & \text{với } x \le -1 \\ 0 = -0 & \text{với } -1 < x < 1 \\ -x^3 - 1 = -(x^3 + 1) & \text{với } x \ge 1 \end{cases}$$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

d) Hàm số không chẵn, cũng không lẻ.

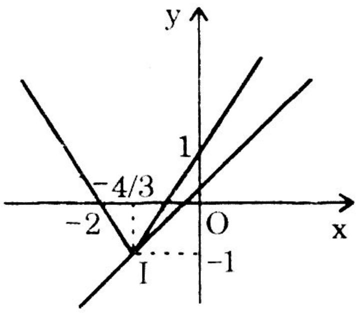
.50. Xét tỉ số : $T = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ với $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$

$$T = \frac{1}{x_1 - x_2}\left[\frac{m}{2x_1 + 1} - \frac{m}{2x_2 + 1}\right] = \frac{-2m}{(2x_1 + 1)(2x_2 + 1)}$$

Vì $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ nên $(2x_1 + 1)(2x_2 + 1) > 0$. Do đó $T > 0$ với $m < 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$ nếu $m < 0$.

.51. a) Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$



Đồ thị : hình bên.

b) Điểm $I\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$ thuộc đường thẳng $y = x + k$ khi và chỉ khi

$$-1 = -\frac{4}{3} + k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$

Từ đó suy ra : Nếu $k < \frac{1}{3}$ thì không có giao điểm.

Nếu $k = \frac{1}{3}$ có một giao điểm.

Nếu $k > \frac{1}{3}$ có hai giao điểm.

.52. Từ giả thiết ta có : $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ 0 = a.0 + b.0 + c \\ 3 = a.1^2 + b.1 + c \end{cases} \Leftrightarrow \quad a = 1, \quad b = 2, \quad c = 0$

Parabol : $y = x^2 + 2x$.

.53. $y = 2x^2 - 4x - 1 = 2(x^2 - 2x) - 1$

$= 2(x^2 - 2x + 1 - 1) - 1 = 2(x - 1)^2 - 3$

Vậy để có parabol $y = 2x^2 - 4x - 1$ ta tịnh tiến parabol $y = 2x^2$ song song với trục hoành sang phải 1 đơn vị rồi tịnh tiến parabol vừa nhận được xuống dưới 3 đơn vị.

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Khái niệm phương trình, phương trình bậc nhất một ẩn

3.6. **a)** $x = -\frac{15}{2}$.

b) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$= \left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]\left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0 \quad \forall x.$$

Suy ra ĐKXĐ : $x \neq 0$. Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu thức chun thì được :

$$x(x + 1)(x^2 - x + 1) - x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

c) $(3) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1931 - x}{75} + 1\right) + \left(\frac{1925 - x}{81} + 1\right) + \left(\frac{1919 - x}{87} + 1\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (2006 - x)\left(\frac{1}{75} + \frac{1}{81} + \frac{1}{87}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2006.$$

d) $(4) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x + 1}{65} + 1 + \frac{x + 3}{63} + 1 = \frac{x + 5}{61} + 1 + \frac{x + 7}{59} + 1$

Đáp số : $x = -66$.

3.7. **a)** Không tương đương. Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình thứ nhâ nhưng không phải là nghiệm của phương trình thứ hai.

b) Tương đương.

3.8. $(1) \Leftrightarrow \quad \frac{x - 55}{1950} - 1 + \frac{x - 53}{1952} - 1 + \ldots = \frac{x - 1950}{55} - 1 + \frac{x - 1952}{53} - 1 + \ldots$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 2005)\left[\frac{1}{1950} + \frac{1}{1952} + \ldots + \frac{1}{1960} - \frac{1}{55} - \ldots - \frac{1}{47}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2005 \in Z.$$

3.9. **a)** ĐKXĐ của phương trình (1) : $\{x \in R \,/\, x \geq 1\} \cap \{x \in R \,/\, x \leq 1\} = \{1\}$.

Giá trị $x = 1$ nghiệm đúng (1). Vậy (1) có nghiệm duy nhất $x = 1$.

b) $-x^2 + 6x - 9 = -(x - 3)^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad$ ĐKXĐ : $x = 3$.

Giá trị $x = 3$ nghiệm đúng (2). Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x = 3$.

3.10. **a)** ĐKXĐ : $x \geq 2$. Với $x \geq 2$ giá trị vế trái luôn lớn hơn 2, vế phải không vượt quá 2. Phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $x \leq 2$.

$(2) \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = -3$ (nhận), $\quad x = 3$ (loại)

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x = -3$.

3.11. **a)** $(1) \quad \Leftrightarrow \quad (m^2 - m)x = 5(m - 1)$

$$m^2 - m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0 \text{ hoặc } m = 1$$

Với $m = 0$: (1) trở thành $0x = -5$. Vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $x \neq m$

$(2) \quad \Rightarrow \quad (m - 3)x = -4m + 2$

Phương trình cuối có vô số nghiệm với những giá trị của m sao cho $m - 3 = 0$ và $-4m + 2 = 0$. Không có giá trị nào của m đồng thời thỏa mãn 2 phương trình.

Kết luận : Không có giá trị nào của m để (2) có vô số nghiệm.

c) $(3) \quad \Leftrightarrow \quad m(m + 1)x = m^2 - 1$

Với $m \neq 0$, $m \neq -1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m - 1}{m}$.

3.12. **a)** $(1) \quad \Leftrightarrow \quad (m^2 - 9)x = m^2 + 3m$

- Nếu $m^2 - 9 \neq 0$ tức là $m \neq \pm 3$ thì (1) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{m^2 + 3m}{m^2 - 9} = \frac{m}{m - 3}.$$

- Nếu $m = 3$ ta có : $\quad 0x = 18 \quad$ vô nghiệm.
- Nếu $m = -3$ ta có : $\quad 0x = 0 \quad$ mọi số thực đều là nghiệm.

b) ĐKXĐ : $x \neq m$

$(3) \quad \Rightarrow \quad (m - 3)x = -4m + 2 \qquad (*)$

- Nếu $m = 3$ thì có $0x = -10$ (vô nghiệm)
- Nếu $m \neq 3$ từ $(*)$ suy ra $x = \dfrac{-4m + 2}{m - 3} \qquad (**)$

Để $(**)$ là nghiệm của (2) thì m phải lấy giá trị sao cho

$$\frac{-4m + 3}{m - 3} \neq m \quad \Leftrightarrow \quad -4m + 2 \neq m(m - 3)$$

$$\Leftrightarrow \quad m^2 - m - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 2,\ m \neq -1.$$

Kết luận : Nếu $m \neq 3$ hoặc $m \neq 2$ hoặc $m \neq -1$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-4m + 2}{m - 3}$.

Nếu $m = 3$ hoặc $m = 2$ hoặc $m = 0$ thì vô nghiệm.

c) ĐKXĐ : $x \neq -3$, $x \neq m$. Ta có :

$$(3) \quad \Rightarrow \quad (x^2 - m^2) + (x^2 - 9) = 2(x + 3)(x - m)$$

$$\Rightarrow \quad (m - 3)x = \frac{1}{2}(m - 3)^2$$

- Nếu $m \neq 3$ thì có $x = \dfrac{1}{2}(m - 3)$. Để (3) có nghiệm ta phải lấy giá trị của m sao cho $\dfrac{1}{2}(m - 3) \neq 3$ và $\dfrac{1}{2}(m - 3) \neq m$. Điều này xảy ra với $m \neq -3$.
- Nếu $m - 3 = 0$ thì (3) có dạng $0x = 0$. Mọi $x \neq \pm 3$ đều là nghiệm.

Tóm lại : Nếu $m \neq \pm 3$ thì (3) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1}{2}(m - 3)$

Nêu $m = -3$ phương trình (3) vô nghiệm.

Nếu $m = 3$, mọi số thực $x \neq \pm 3$ đều là nghiệm.

d)
$$\begin{aligned}
(4) \quad &\Leftrightarrow \quad (mx + 1)^2 = (3x + m - 2)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (mx + 1)^2 - (3x + m - 2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [(mx + 1) + (3x + m - 2)][(mx + 1) - (3x + m - 2)] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (m + 3)x + m - 1 = 0 \quad \text{hoặc} \quad (m - 3)x - m + 3 = 0
\end{aligned}$$

- Nếu $m \neq \pm 3$ thì (4) có hai nghiệm $x = 1$ và $x = \dfrac{1 - m}{m + 3}$.
- Nếu $m = -3$ thì (4) có một nghiệm $x = 1$.
- Nếu $m = 3$ thì mọi số thực đều là nghiệm.

3.13. a) ĐKXĐ : $D = \{x \in R \,/\, x \neq \pm k\}$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad (x^2 - k^2)(1 - m^2)x + k^2 + m(x^2 - k^2) = x^2 \\
&\Rightarrow \quad (x^2 - k^2)[(m^2 - 1)x + 1 - m] = 0 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - k^2 = 0 \ \text{ hoặc } \ (m^2 - 1)x + 1 - m = 0
\end{aligned}$$

Phương trình $x^2 - k^2$ có các nghiệm $x = \pm k$ (loại vì không thỏa ĐKXĐ)

- Nếu $m \neq \pm 1$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{1 + m}$ nếu m lấy giá trị sao cho $\dfrac{1}{1 + m} \neq \pm k$.

- Nếu $m = 1$ thì mọi $x \neq \pm k$ đều là nghiệm.
- Nếu $m = -1$ thì có $0x + 2 = 0$ vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $m \neq 0, k \neq 0, m + k \neq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x - mk}{m + k} + \left(\frac{x}{m} - k\right) + \left(\frac{x}{k} - m\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - mk)\left[\frac{1}{m + k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k}\right] = 0$$

- Nếu $m \neq 0$, $k \neq 0$, $m + k \neq 0$ và $\frac{1}{m + k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} \neq 0$: (2) có nghiệm $x = mk$
- Nếu $\frac{1}{m + k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = 0$ thì mọi số thực đều là nghiệm của phương trình.

§2. Phương trình, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

3.25. a) Theo quy tắc Crame

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13; \quad D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -26; \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 13$$

$$x = \frac{D_x}{D} = 2, \quad y = \frac{D_y}{D} = -1.$$

b) Đáp số : $x = 1$, $y = 2$.

3.26. Thay $x = 3$, $y = 2$ vào hệ phương trình thì được

$$3(m + 1) + 2 = 3 - m \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

3.27. a) Với $m \neq \frac{2}{3}$ công thức nghiệm của phương trình là :

$$\left(x; \frac{(2 - 3m)x + m + 3}{5}\right), x \in R \quad \text{hay} \quad \left(\frac{5y - m - 3}{2 - 3m}; y\right), y \in R$$

Với $m = \frac{2}{3}$ ta có $\left(x; \frac{11}{15}\right)$, $x \in R$.

b) $(3m - 2)x_0 + 5y_0 = m + 3 \Leftrightarrow (3x_0 - 1)m - 2x_0 + 5y_0 - 3 = 0 \; \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0 - 1 = 0 \\ -2x_0 + 5y_0 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ y_0 = \frac{11}{15} \end{cases}$$

Vậy $\left(\frac{1}{3};\frac{11}{15}\right)$ luôn là nghiệm của hệ dù m lấy bất kì giá trị nào.

3.28. $D = \begin{vmatrix} m-1 & 2m \\ 2m & m-1 \end{vmatrix} = -(m+1)(3m+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$ hoặc $m = -\frac{1}{3}$

$D_x = \begin{vmatrix} -2 & 2m \\ m-1 & m-1 \end{vmatrix} = 2(1-m^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 1$

$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ 2m & m-1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$

Hệ (I) có vô số nghiệm khi $D = D_x = D_y = 0$ khi $m = -1$.

3.29. a) Bạn vẽ đồ thị các hàm số $y = \frac{x}{2} - 2$ và $y = \frac{3}{2}x - 4$ trên cùng hệ trục tọa độ. Nghiệm (2; –1).

b) Bạn tự giải.

3.30. a) $D = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = -1$ hoặc $m = 2$

$D_x = \begin{vmatrix} 2 & m+2 \\ m & m \end{vmatrix} = -m^2$; $\qquad D_y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 2$.

- Nếu $m \neq \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất $x = \frac{m}{m+1}$, $y = \frac{1}{m-1}$.
- Nếu $m = -1$ thì $D = D_x = D_y = 0$, hệ có vô số nghiệm.
- Nếu $m = 1$ thì $D = 0$, $D_x \neq 0$, hệ vô nghiệm.

3.31. a) Đặt $\frac{1}{x-3} = X$, $\frac{1}{y+1} = Y$, giải hệ phương trình với ẩn X, Y :

$$\begin{cases} 4X + 5Y = 2 \\ 5X + Y = \frac{29}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{1}{4} \\ Y = \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) Đặt $\frac{x}{x+2} = X$, $\frac{y}{y+1} = Y$ và giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} X + 2Y = \frac{29}{15} \\ 2X - Y = \frac{8}{15} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3}{5} \\ Y = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

c) Đáp số : x = 2, y = 1. **d)** Đáp số : x = 3, y = 1.

3.32. a) *Cách thứ nhất :* Nhân phương trình thứ ba với -2 rồi cộng với phương trình thứ hai. Nhân phương trình thứ ba với -3 rồi cộng với phương trình thứ nhất thì được :

$$\Leftrightarrow \quad (\mathrm{I'}) \begin{cases} -8y - 8z = -24 \\ -y - 7z = -9 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

Lại nhân phương trình thứ hai của hệ (I') với -8 rồi đem cộng vào phương trình thứ nhất ta được :

$$(\mathrm{I'}) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 48z = 48 \\ -y - 7z = -9 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Cách thứ hai : Sau khi được (I') ta giải hệ phương trình hai ẩn

$$\begin{cases} -8y - 8z = -24 \\ -y - 7z = -9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y = 2 \\ z = 1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

b) Ta có : $5x + |y| = -9 \quad \Rightarrow \quad 5x = -9 - |y| \quad \Rightarrow \quad x < 0$

và $|x| = -x$. Vì vậy : $\begin{cases} |x| + 3y = 5 \\ 5x + |y| = -9 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 5x + |y| = -9 \end{cases}$

+ Nếu $y \geq 0$ ta có hệ : $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 5x + y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \text{ (loại vì } x = 2 > 0) \end{cases}$

+ Nếu $y < 0$ ta có hệ : $\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 5x - y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{11}{7} \\ y = \dfrac{8}{7} \text{ (loại vì không thỏa } y < 0) \end{cases}$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

3.33. a) ƯCLN (12; 10) = 2, chia hết 4. Vậy phương trình có nghiệm nguyên.

$$12x - 10y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = x + \frac{x - 2}{5}$$

Đặt $\dfrac{x - 2}{5} = u \quad \Rightarrow \quad x = 5u + 2; \quad y = 6u + 2, \ u \in Z$

Cho $u = 0$ ta được một nghiệm của phương trình là $x = 2$, $y = 2$.

Công thức tổng quát của nghiệm là $\begin{cases} x = 2 + 5u \\ y = 2 + 6u \end{cases}, \quad u \in Z.$

b) Giải tương tự câu a). Nghiệm tổng quát : $\begin{cases} x = -1 + 12t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$, $t \in Z$.

3.34. $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$ hay $m = -\dfrac{1}{2}$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 + 2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 + 3m + 1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2 + 2m \end{vmatrix} = 4m^2 + 2m$$

Nếu $m \neq 1$, $m \neq -\dfrac{1}{2}$ hệ có nghiệm

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m^2 + 3m + 1}{2m^2 - m - 1} = \frac{(m+1)(2m+1)}{(m-1)(2m+1)} = \frac{m+1}{m-1} = 1 + \frac{2}{m-1}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{4m^2 + 2m}{2m^2 - m - 1} = \frac{2m(2m+1)}{(m-1)(2m+1)} = \frac{2m}{m-1} = 2 + \frac{2}{m-1}$$

Để x, y nguyên phải lấy $m - 1 = \pm 1, \pm 2 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{-1; 0; 2; 3\}$

§3. Phương trình bậc hai một ẩn

3.40. a) ĐK : $x \neq 1$, $x \neq -\dfrac{5}{3}$

$\Rightarrow \quad (2x - 5)(3x + 5) = (5x - 3)(x - 1) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 3x - 28 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 4$ (nhận), $\quad x_2 = -7$ (nhận)

b) ĐK : $x \neq \dfrac{1}{2}$, $x \neq -\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \quad (5 - x)(3x + 1) = (15 - 4x)(2x - 1) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow \quad x = 2$ (nhận)

c) ĐK : $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$

$\Rightarrow \quad 2x = x + 2 + (4 - x)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2$ (loại), $\quad x_2 = 3$ (nhận).

3.41. a) $\Leftrightarrow \quad [(x + 3)(x + 6)][(x + 4)(x + 5)] = 120$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 9x + 18)(x^2 + 9x + 20) - 120 = 0$

Đặt $t = x^2 + 9x + 18$ ta được : $t^2 + 2t - 120 = 0 \quad \Leftrightarrow t_1 = -12, t_2 = 10$

Giải phương trình :

$x^2 + 9x + 18 = -12 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 30 = 0$ (vô nghiệm)

$x^2 + 9x + 18 = 10 \Leftrightarrow x^2 + 9x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -8$

Phương trình đã cho có tập nghiệm $T = \{-1; -8\}$.

b) ĐK : $2x^2 - 3x \geq 0$. Đặt $t = \sqrt{2x^2 - 3x} \geq 0$, ta được :

$t^2 - 2t = 3 \Rightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -1$ (loại), $t_2 = 3$ (nhận)

Giải phương trình : $\sqrt{2x^2 - 3x} = 3 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 9$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2},\quad x_2 = 3.$$

3.42. a) Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta được : $3t^2 - 5t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{5 - \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{2}{3} \text{ (nhận)};\quad t_2 = \frac{5 + \sqrt{25 - 24}}{6} = 1 \text{ (nhận)}$$

Suy ra : $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{1}$.

b) Tương tự câu a). $2t^2 + 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -2$ (loại), $t_2 = -\frac{3}{2}$ (loại)

Phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta được : $2t^2 - 7t - 4 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{1}{2}$ (loại), $t_2 = 4$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

3.43. a) (1) có nghiệm trong các trường hợp.

+ $m^2 - 4 = 0,\ m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2$

+ $\begin{cases} m^2 - 4 \neq 0 \\ \Delta = (m+2)^2 - (m^2 - 4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$ và $m \neq \pm 2$

Tổng hợp kết quả hai trường hợp : (1) có nghiệm với $m > -2$.

b) TH1. $m^2 - 4 = 0$ và $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m = 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = -\frac{1}{8}$

TH2. $m^2 - 4 \neq 0$ và $\Delta' = 4m + 8 = 0$. Trường hợp này không xảy ra.

Tóm lại : $m = 2$ thì (1) có nghiệm duy nhất.

3.44. a) $\Delta' = 4 - (m + 1) = 3 - m$

- Nếu $3 - m < 0 \Leftrightarrow m > 3$ thì (1) vô nghiệm.

- Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ thì (1) có nghiệm $x = 2$.
- Nếu $3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ thì (1) có 2 nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 - m}$.

b) $\Delta' = (m + 2)^2 - (m + 1)(m - 3) = 6m + 7$

- Nếu $6m + 7 < 0 \quad \Leftrightarrow m < -\frac{7}{6}$ thì (2) vô nghiệm.
- Nếu $6m + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow m = -\frac{7}{6}$ thì (2) có nghiệm kép $x = -5$.
- Nếu $m + 1 \neq 0$ và $6m + 7 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{7}{6}$ và $m \neq -1$ thì (2) có 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{m + 2 \pm \sqrt{6m + 7}}{m + 1}$.

3.45. a) Để cả 2 phương trình (1) và (2) có nghiệm thì phải có :

$$\begin{cases} \Delta_1 = m^2 - 8 \geq 0 \\ \Delta_2 = 1 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2\sqrt{2} \text{ hoặc } m \geq 2\sqrt{2} \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2\sqrt{2} \quad (*)$$

Giả sử α là nghiệm chung của (1) và (2) thì

$$\alpha^2 + m\alpha + 2 = \alpha^2 + 2\alpha + m \quad \Leftrightarrow \quad (m - 2)\alpha = m - 2$$

Từ điều kiện (*) suy ra $m - 2 \neq 0$ và $\alpha = \dfrac{m - 2}{m - 2} = 1$

Thay $\alpha = 1$ vào (1) ta được : $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$.

b) Để (3) có 4 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần là mỗi phương trình (1) và (2) đều phải có 2 nghiệm phân biệt và chúng không trùng nhau, tức là phải có : $m < -2\sqrt{2}$ và $m \neq -3$.

Ta chứng minh rằng điều kiện trên cũng là điều kiện đủ.

Thật vậy các nghiệm của (2) là $x_1 = -1 - \sqrt{1 - m}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1 - m}$.

Thay x_1, x_2 vào phương trình (1) ta có :

$$f(x_1) = \left(-1 - \sqrt{1 - m}\right)^2 + m\left(-1 - \sqrt{1 - m}\right) + 2 = (2 - m)\left(2 - \sqrt{1 + m}\right) \neq 0$$

$$f(x_2) = \left(-1 + \sqrt{1 - m}\right)^2 + m\left(1 - \sqrt{1 - m}\right) + 2 = (m - 2)\left(2 - \sqrt{1 - m}\right) \neq 0$$

3.46. Biệt thức của (1) và (2) : $\Delta_1 = m^2 - 4n$, $\quad \Delta_2 = p^2 - 4p$

$$\Delta_1 + \Delta_2 = m^2 + p^2 - 4(n + q) \geq m^2 + p^2 - 2mp \quad (\text{vì } mp \geq 2(n + q)$$

$$\Rightarrow \quad -2mp \leq -4(n + q)$$

$$\Delta_1 + \Delta_2 \geq (m - p)^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{ít nhất } \Delta_1 \geq 0 \text{ hay } \Delta_2 \geq 0.$$

3.47. **a)** $x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{7}{3}$. **b)** $x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1961}{45}$.

3.48. **a)** Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của phương trình $2x^2 + x - 3 = 0$ thì phương trình mới sẽ có các nghiệm là $x_1 + 2$ và $x_2 + 2$. Đó là phương trình :

$$x^2 - (x_1 + x_2 + 4)x + (x_1 + 2)(x_2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - \left(-\frac{1}{2} + 4\right)x + \left(-\frac{3}{2} - 1 + 4\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2} = 0.$$

b) Phương trình cần tìm là :

$$x^2 - (x_1 + x_2 + p)x + \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + q - \frac{p^2}{4} = 0.$$

3.49. **a)** $2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = 3$

$$\Rightarrow \quad 2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)$$

$6x^2 + 7x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 6x^2 + 7x + 2 = 6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 3)}{6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \frac{x - 3}{3x + 2}.$$

b) $$B = \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + 5}.$$

3.50. **a)** $x_1 + x_2 = -p; \qquad x_1x_2 = q$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2]$$

$$= -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3.$$

b) $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2]$

Bởi vì $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$

$\Rightarrow \quad x_1 - x_2 = \pm\sqrt{p^2 - 4q}$ cho nên $x_1^3 - x_2^3 = \pm(p^2 - q)\sqrt{p^2 - 4q}$.

3.51. a) $m + 2 \neq 0$ và $\dfrac{m-1}{m+2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < 1.$

b) (1) có đúng một nghiệm dương trong các trường hợp :

TH1 : $m + 2 = 0, \quad m + 3 \neq 0$ và $-\dfrac{m-1}{m+3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < m < 1$

TH2 : $m + 2 \neq 0, \quad \dfrac{m-1}{m+2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < 1$

Tổng hợp kết quả hai trường hợp : $-3 < m < 1.$

3.52. a) $\Delta = m^2 + 560 > 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2.

Theo định lí Viet : $\quad x_1 + x_2 = -\dfrac{m}{5}, \quad x_1x_2 = -\dfrac{28}{5}$

Điều kiện : $5x_1 + 2x_2 = 1 = 3x_1 + 2(x_1 + x_2) \quad \Rightarrow \quad 3x_1 = 1 + \dfrac{2m}{5}$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{2m+5}{15}, \quad x_2 = -\frac{m}{5} - x_1 = -\frac{m}{5} - \frac{2m+5}{15} = -\frac{m+1}{3}$$

Thay vào hệ thức $x_1x_2 = -\dfrac{28}{5}$ ta được :

$$\left(\frac{2m+5}{15}\right)\left(-\frac{m+1}{3}\right) = -\frac{28}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 2m^2 + 7m - 247 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = -13 \text{ hoặc } m = \frac{19}{2}.$$

b) $x_1^2 + x_2^2 = 4(x_1 + x_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(x_1 + x_2) \qquad (*)$

$\Delta' = 4 - m^2 - 3m = -(m + 4)(m - 1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < m < 1 \qquad (**)$

Thay trong (*) $\quad x_1 + x_2 = 4, \quad x_1x_2 = m^2 + 3m \quad$ ta được :

$4^2 - 2(m^2 + 3m) = 16 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0$ hoặc $m = -3.$

Kết luận : $m = 0$ hoặc $m = -3$ là các giá trị cần tìm.

3.53. a) $\Delta = (2m - 3)^2 - 4(m^2 - 3m - 1) = 13 > 0 \ \forall m.$

b) $x_1 + x_2 = 2m - 3 \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{x_1 + x_2 + 3}{2}$

Thay m vào hệ thức $x_1x_2 = m^2 - 3m - 1$ ta được :

$$x_1x_2 = \left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{x_1 + x_2 + 3}{2}\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 13 = 0.$$

3.54. $x_1 + x_2 = 2(m+1)$, $\quad x_1x_2 = 2m + 5$

$$A = x_1^2 + x_2^2 + 10x_1x_2 = 4(m+1)^2 + 8(2m+5)$$

$$= 4(m^2 + 6m + 11) = 4(m+3)^2 + 8 \geq 8\ \forall m$$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 chỉ khi $m = -3$.

3.55. Phương trình (1) có 2 nghiệm dương nên ta có $\begin{cases} \Delta_1 = p^2 - 4q > 0 \\ S_1 = -p > 0 \\ P_1 = q > 0 \end{cases}$ $\quad(*)$

Biệt thức của (2) là :

$$\Delta_2 = (p - 2rq)^2 - 4q(1 - pr) = p^2 - 4pqr + 4r^2q^2 - 4q + 4pqr$$

$$= p^2 - 4q + 4r^2q^2 = \Delta_1 + 4r^2q^2 > 0$$

nên (2) có hai nghiệm là y_1, y_2. Xét tổng $S_2 = y_1 + y_2$ và $P_2 = y_1y_2$ ta có :

$$S_2 = \frac{-p + 2rq}{q} = -\frac{p}{q} + 2r > 0 \quad \text{theo giả thiết và } (*) \text{ và } r \geq 0$$

$$P_2 = \frac{1 - pr}{q} = \frac{1}{q} - \frac{p}{q}r > 0 \qquad \text{Suy ra} \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0.$$

3.56. Ta có thể viết các điều kiện dưới dạng :

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{bd}{a} \\ x_2 + x_3 = -\dfrac{cd}{b} \\ x_3 + x_1 = -\dfrac{ad}{c} \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{c}{a} \\ x_2x_3 = \dfrac{a}{b} \\ x_3x_1 = \dfrac{b}{c} \end{cases}$$

Nhân vế với vế các hệ thức của (2) ta được : $(x_1x_2x_3)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad x_1x_2x_3 = -1$ hoặc $x_1x_2x_3 = 1$.

a) Nếu $x_1x_2x_3 = -1$ từ các hệ thức của (2) ta rút ra :

$$(3) \begin{cases} x_1 = -\dfrac{b}{a} \\ x_2 = -\dfrac{c}{a} \\ x_3 = -\dfrac{a}{c} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) < 0$$

Mặt khác từ các hệ thức ở (1) ta có :

$$2(x_1 + x_2 + x_3) = -d\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \Rightarrow \quad d = 2$$

Thay d = 2 vào (1) thì được : $(4)\begin{cases} x_1 + x_2 = -2\dfrac{b}{a} \\ x_2 + x_3 = -2\dfrac{c}{b} \\ x_3 + x_1 = -2\dfrac{a}{c} \end{cases}$

Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{a}{c} = \dfrac{b+c+a}{a+b+c} = 1$

Suy ra $a = b = c > 0,\ d = 2.$

b) Nếu $x_1x_2x_3 = 1$. Làm tương tự như trên ta rút ra $d = -2$.

Điều này trái với yêu cầu đề bài.

Kết luận : Các số $a = b = c > 0$ và $d = 2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

§4. Hệ phương trình bậc hai hai ẩn

3.62. a) $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -8 - x \\ x^2 + (x+8)^2 + 6x - 2(x+8) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = -4,\ y = -4$ hoặc $x = -6,\ y = -2.$

b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ (4-2y)^2 + 4y^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y \\ y^2 - 2y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = 1,\ x = 2$

3.63. a) Đặt $S = x + y,\ P = xy$ ta có :

$\Rightarrow \begin{cases} S^2 - P = 3 \\ 2S + P = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad S = 0,\ P = -3$ hoặc $S = -2,\ P = 1$

Tập nghiệm : $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right),\ \left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right),\ (-1;-1).$

b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ xy - (x+y) + 1 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P = 65 \\ P - S = 17 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} P = S + 17 \\ S^2 - 2S - 99 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad S = -9,\ P = 8$ hoặc $S = 11,\ P = 28$

$\Leftrightarrow \quad x = -1,\ y = -8$ hoặc $x = -8,\ y = -1$ hoặc $x = 4,\ y = 7$

hoặc $x = 7,\ y = 4.$

3.64. **a)** $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3x - y \\ x^2 - y^2 = 4(x - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 = 3x - y \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ x^2 = 3x - y \end{cases}$

Tập nghiệm : $(0; 0)$, $(2; 2)$.

b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x(x + y + 1) = 20 \\ y(x + y + 1) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2 \\ x^2 + xy + x - 20 = 0 \end{cases}$

Tập nghiệm : $\left(\dfrac{10}{3}; \dfrac{5}{3}\right)$, $(-4; -2)$.

3.65. **a)** Đặt $y = kx$

$$\begin{cases} x^2(2 - 4k + 3k^2) = 3 \\ x^2(2 - k^2) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2 - 4k + 3k^2}{2 - k^2} = \dfrac{3}{7} \\ x^2(2 - k^2) = 7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ x^2(2 - k^2) = 7 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k = \dfrac{2}{3} \\ x^2(2 - k^2) = 7 \end{cases}$$

Tập nghiệm : $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}; -\sqrt{2}\right)$.

b) Đáp số : $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(2; 1)$, $(-2, -1)$.

3.66. **a)** Nhân hai vế của (2) với +2 rồi cộng vào (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x + 6y + 2 = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2y)^2 + 3(x + 2y) + 2 = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} x + 2y + 1 = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases} \text{ hoặc } (**) \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ xy + y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Tập nghiệm : $\left(-3 + 2\sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right)$, $\left(-3 - 2\sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right)$,

$\left(-3 + \sqrt{5}; \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(-3 - \sqrt{5}; \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Nhân hai vế của (1) với (-3), nhân hai vế của (2) với (−2) rồi cộng với phương trình (1) đã nhân với (−3) ta được :

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 4xy - 2x - y + 2 = 0 \\ 4x + 9y - 6 = 0 \end{cases}$ Tập nghiệm : $(-3; 2)$ và $\left(-2; \dfrac{14}{9}\right)$.

3.67. **a)** Đặt $u = x^2 - 3x$, $v = y^2 + 4y$ thì được :

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ 3u - 2v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \quad u = 1, \quad v = 0$$

Tập nghiệm : $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};0\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{13}}{2};-4\right)$, $\left(\dfrac{3-\sqrt{13}}{2};-4\right.$

b) Đặt $x + y = u$, $\sqrt{xy} = v$ thì được :

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13 \\ u - v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 1 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} u = 5 \\ v = 2 \end{cases}$$

Tập nghiệm : $\left(2+\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}\right)$, $(4;\ 1)$, $(1;\ 4)$.

3.68. **a)** Đặt $x + y = S$, $xy = P$ ta được $\begin{cases} SP = 30 \\ S^3 - 3SP = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP = 30 \\ S^3 = 125 \end{cases}$

Tập nghiệm : $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$.

b) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$

Tập nghiệm : $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$.

3.69. Thế $x = \dfrac{13 - 5y}{3}$ vào phương trình (2) và rút gọn :

$$52y^2 - 130y + 169 - 9m = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = 65^2 - 52(169 - 9m) = 468m - 4563$$

- Nếu $m < \dfrac{4563}{468} = \dfrac{39}{4}$ thì hệ vô nghiệm.
- Nếu $m = \dfrac{39}{4}$ thì hệ có nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{5}{4}\right)$.
- Nếu $m > \dfrac{39}{4}$ thì (*) có 2 nghiệm $y_{1,2} = \dfrac{65 \pm \sqrt{\Delta'}}{52}$.

Hệ I có 2 nghiệm : $\left(\dfrac{13 - 5y_1}{3};y_1\right)$, $\left(\dfrac{13 - 5y_2}{3};y_2\right)$.

3.70. **a)** Đặt $S = x + y$, $P = xy$ ta được : (I') $\begin{cases} S + P = 2m + 1 \\ SP = m^2 + m \end{cases}$

S, P là nghiệm của phương trình $Z^2 - (2m + 1)Z + m^2 + m = 0$ (*)

$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 > 0$ nên (*) luôn có nghiệm

$$Z_1 = m \quad \text{và} \quad Z_2 = m + 1$$

Tập nghiệm của hệ (I) : (m; 1) và (1; m).

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

3.71. **a)** ĐKXĐ : $x \neq 2$

$$\Leftrightarrow \quad x + \frac{2}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ (loại)}.$$

Phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện xác định $x = 3$. Thay $x = 3$ thì VT nhỏ hơn VP. Vô nghiệm.

3.72. **a)** $m \neq 2$, $m \neq 3$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{m-1}{m^2 - 5m + 6}$

Nếu $m = 2$ hoặc $m = 3$ vô nghiệm.

b) ĐK : $x \neq -1$, $x \neq 0$. Khử mẫu thức và rút gọn được $(m - 3)x = 2$.

Nếu $m = 3$, vô nghiệm.

Nếu $m \neq 3$ và $m \neq 1$, có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{2}{m-3}$.

c) $\Leftrightarrow (m^2 - 9)x = m^2 - 4m + 3 \quad \Leftrightarrow \quad (m - 3)(m + 3)x = (m - 1)(m - 3)$

- Nếu $m \neq \pm 3$: nghiệm $x = \dfrac{m-1}{m+3}$
- Nếu $m = 3$: phương trình trở thành $0x = 0$. Mọi $x \in \mathbb{R}$ đều là nghiệm.
- Nếu $m = -3$ thì có $0x = 24$, vô nghiệm.

3.73. **a)** ĐK : $x \neq -3$, $y \neq 2$. Đặt $\dfrac{1}{x+3} = u$ và $\dfrac{1}{y-2} = v$ có :

$$\begin{cases} 5u - 9v = 100 \\ 9u + 7v = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \quad u = 56, \quad v = 20 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-167}{56},\ y = \frac{41}{20}.$$

b) Đặt $\dfrac{x-1}{x+1} = u$, $\dfrac{y+3}{y-2} = v$ thì có

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2u - v = 7 \\ 3u + 5v = -9 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x-1}{x+2} = 2, \quad v = \frac{y+3}{y-2} = -2$$

$$\Rightarrow \quad x = -3, \quad y = \frac{3}{4}.$$

3.74. **a)** $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \pm 2$

$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & m \end{vmatrix} = 3(m-2), \qquad D_y = \begin{vmatrix} m & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6(m-2)$

- Nếu $m \neq \pm 2$ hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{3}{m+2}$, $y = \dfrac{6}{m-2}$.
- Nếu $m = 2$ hệ có vô số nghiệm là nghiệm của phương trình $2x + y = 3$.
- Nếu $m = -2$ vô nghiệm.

b) $D = \begin{vmatrix} -4 & m \\ m+6 & 2 \end{vmatrix} = -(m+2)(m+4)$,

$D_x = (1-m)(m+2), \qquad D_y = -(m+2)(m+9)$

- Nếu $m \neq -2$ và $m \neq -4$ hệ có nghiệm $x = \dfrac{m-1}{m+4}$, $y = \dfrac{m+9}{m+4}$.
- Nếu $m = -2$ hệ có vô số nghiệm.
- Nếu $m = -4$ hệ vô nghiệm.

3.75. Định thức của phương trình :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & -m \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -m + 1 + 2m = m + 1$$

Với $m \neq -1$ thì $D \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{D_x}{D} = m + 1, \qquad y = \frac{D_y}{D} = m - 3$$

$A = x^2 + y^2 = (m+1)^2 + (m-3)^2 = 2m^2 - 4m + 10 = 2(m-1)^2 + 8$

- A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 8 khi $m = 1$.

3.76. a) ĐKXĐ : $x \neq \pm m$. Khử mẫu ta có :

$$12x^2 - 4mx - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{m}{2},\ x_2 = -\frac{m}{6}.$$

b) ĐKXĐ : $x \neq \pm m$. Các nghiệm $x = \pm\dfrac{m}{3}$, $m \neq 0$.

c) Đáp số : $x = \pm\sqrt{2}$, $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **d)** $x = \pm 3$, $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.77. **a)** $\Leftrightarrow (x+2)(x^2-9) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2,\ x = \pm 3.$

b) $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0 \quad \forall x \in R$. Do đó :

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 2x + 7) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x + 4)$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 + 2x + 3)^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1.$

c) $\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} - 4 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 2} \ge 0$ thì có :

$$t^2 + t - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-1 + 7}{2} = 3$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 3x + 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

d) Vì x = 0 không phải nghiệm của phương trình. Chia hai vế cho x^2 ta được :

$$x^2 + 10x + 26 + \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{x^2} + 10\left(x + \frac{1}{x}\right) + 26 = 0$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = t \quad \Rightarrow \quad t^2 + 10t + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -4,\ t_2 = -6$

Giải $x + \frac{1}{x} = -4 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 - \sqrt{3}, \quad x_2 = -2 + \sqrt{3}$

$x + \frac{1}{x} = -6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 - 2\sqrt{2}, \quad x_2 = -3 + 2\sqrt{2}.$

3.78. **a)** Thay x = −4 vào : $16(2m + 1) - 8(3m - 2) + 2m - 10 = 0 \Rightarrow m = -\frac{11}{5}$

$$x_1x_2 = \frac{2m - 10}{2m + 1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{2m - 10}{-4(2m + 1)} = -\frac{18}{17}.$$

b) Đáp số : $m = 3, \quad x = -\frac{13}{2}$ hoặc $m = 4, \quad x_2 = -4$.

3.79. **a)** Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$: (1) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}$.

Nếu $m - 3 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne 3$: $\Delta' = m^2 - (m - 3)(m - 6) = 9m - 18$

Nếu $m > 2, m \ne 3$: (1) có 2 nghiệm $x_{1,2} = \frac{m \pm \sqrt{\Delta'}}{m - 3}$.

Nếu $m = 2$: (1) có nghiệm $x = \frac{m}{m - 3}$.

Nếu $m < 2$: (1) vô nghiệm.

b) Nếu $m = -1$: (2) có nghiệm $x = 3$.

Nếu $m \neq -1$: $\Delta = 8m + 9$

Nếu $m > -\frac{9}{8}$ và $m \neq -1$ thì (2) có 2 nghiệm $x_{1,2} = \frac{2m + 1 \pm \sqrt{8m + 9}}{2(m + 1)}$.

Nếu $m < -\frac{9}{8}$: (2) vô nghiệm.

3.80 **a)** $\Delta' = (m - 1)^2 - (m - 3) = m^2 - 3m + 4 = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \ \forall m \in R$.

b) $x_1 + x_2 = 2(m - 1) \quad \Rightarrow \quad m = \frac{x_1 + x_2}{2} + 1$

$x_1x_2 = m - 3 = \frac{x_1 + x_2}{2} - 2$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 4$ không phụ thuộc m.

c) $A = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2$

$= 4(m - 1)^2 - (m - 3) = 4m^2 - 9m + 7 = \left(2m - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}$.

$\Rightarrow \quad$ A đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{31}{16}$ khi $m = \frac{9}{8}$.

3.81. Ta phải có : $\begin{cases} m - 4 \neq 0 \\ P = \dfrac{m - 1}{m - 4} < 0 \\ S = \dfrac{2(m - 2)}{m - 4} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 4 \\ 2 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 1 < m < 4.$

3.82. Với mọi m hệ luôn có nghiệm $x = m$, $y = 1$ hay $x = 1$, $y = m$.

Nếu hệ có nghiệm duy nhất thì hai nghiệm trên phải trùng nhau. Suy ra điều kiện ắt có $m = 1$.

Đảo lại nêu $m = 1$ thì hệ trở thành :

$\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 2 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad x = y = 1$

Kết luận với $m = 1$ hệ có nghiệm duy nhất.

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức

4.23. a) $\Leftrightarrow \quad (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \ge 0.$

b) $\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \ge 0.$

4.24. a) $\Leftrightarrow \quad (a-bc)^2 + (b-ac)^2 + (c-ab)^2 \ge 0.$

b) $\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(b-c)^2 + \frac{1}{2}(c-a)^2 \ge 0.$

4.25. a) $\Leftrightarrow \quad (a+b)(a^2 - ab + b^2) \ge ab(a+b)$

$\Leftrightarrow \quad a^2 - ab + b^2 \ge ab$ (vì $a + b \ge 0$) $\quad \Leftrightarrow \quad (a-b)^2 \ge 0.$

b) $\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \le \frac{a^3+b^3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3ab(a \le 3(a^3 + b^3)$

$\Leftrightarrow \quad ab \le a^2 - ab + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le (a-b)^2.$

4.26. a) $\Leftrightarrow \quad 2(ab + ac + bc) \le 2(a^2 + b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow \quad 0 \le (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2).$

b) $\Leftrightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - b + c\right)^2 \ge 0.$

4.27. a) $\Leftrightarrow \quad a^4 + b^4 + 4a^2b^2 - 3a^3b - 3ab^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)^2 + 3ab(2ab - a^2 - b^2) \ge 0$

$\Leftrightarrow \quad (a-b)^2[(a+b)^2 - 3ab] \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a-b)^2\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}b}{2}\right)^2\right] \ge 0$

b) Ta có : $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \le \frac{a^4+b^4}{2}$ (theo kết quả bài 4.1)

$(2) \Rightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^4+b^4}{2} \le \frac{a^6+b^6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a^2b^4 + a^4b^2 \le a^6 + b^6$

$\Leftrightarrow \quad a^2b^2(a^2 + b^2) \le (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^2)$

$\Leftrightarrow \quad a^2b^2 \le a^4 - a^2b^2 + b^4 \quad \Rightarrow \quad 0 \le (a^2 - b^2)^2.$

4.28. a) Do $0 < b < a \Rightarrow b^2 < ab \Rightarrow b^2 + ab < 2ab \Rightarrow b < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (1)

Lại có $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{2}{\sqrt{ab}}$

$$\Rightarrow \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \frac{2}{\frac{2}{\sqrt{ab}}} = \sqrt{ab} \qquad (2$$

Vì $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0 \Leftrightarrow a+b > 2\sqrt{a}\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ (3

Vì $b < a \Rightarrow a+b < 2a \Rightarrow \frac{a+b}{2} < a$ (4

Từ (1), (2), (3) và (4) suy ra đpcm.

b) $\Leftrightarrow (1+ab)(2+a^2+b^2) \geq 2(1+a^2)(1+b^2)$

$\Leftrightarrow 2ab + a^3b + ab^3 \geq a^2 + b^2 + 2a^2b^2$

$\Leftrightarrow ab(a^2+b^2) - 2a^2b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \geq 0$

$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 - (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2[ab-1] \geq 0.$

4.29. a) Vì $a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\ \forall a \in R$

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} = \frac{a^2+a+1}{\sqrt{a^2+a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}}$$

$$\sqrt{a^2+a+1} + \frac{1}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+a+1}}{\sqrt{a^2+a+1}}} = 2.$$

b) $VT = \left(\frac{b+a}{b}\right)\left(\frac{c+b}{c}\right)\left(\frac{a+c}{a}\right) \geq \frac{2\sqrt{ab}}{b}\cdot\frac{2\sqrt{bc}}{c}\cdot\frac{2\sqrt{ac}}{a} = 8.$

4.30. a) $\Leftrightarrow (1+a+b)(a+b+ab) \geq 3\sqrt[3]{1.a.b}.3\sqrt[3]{a.b.ab} = 9ab.$

b) $3a^3 + 7b^3 \geq 3a^3 + b^3 + 3b^3 \geq 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.3b^3} = 9ab^2$

4.31. a) $VP = a^2bc + b^2ac + c^2ab \leq \frac{a^2(b^2+c^2)}{2} + \frac{b^2(a^2+c^2)}{2} + \frac{c^2(a^2+b^2)}{2}$

$\Leftrightarrow VP \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \leq \frac{a^4+b^4}{2} + \frac{b^4+c^4}{2} + \frac{c^4+a^4}{2} = a^4+b^4+c^4.$

b) $VT \geq \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^m + \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^m = 2^m\left(\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m} + \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^m}\right)$

$$\geq 2^m.2\sqrt{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^m.\left(\frac{b}{a}\right)^m}} = 2^{m+1}.$$

4.32. a) $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+d}\right)$$

$$\geq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\frac{b.c.d}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Tương tự ta có các kết quả

$$\frac{1}{1+b} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a.cd}{(1+a)(1+c)(1+d)}}$$

$$\frac{1}{1+c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abd}{(1+a)(1+b)(1+d)}}$$

$$\frac{1}{1+d} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+d)}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{81} \geq abcd.$$

4.33. a) Trong tam giác các cạnh a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 0, c + a - b > 0$ $a + b - c > 0$. Theo bất đẳng thức Côsi

$$0 < \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{b+c-a+c+a-b}{2} = c$$

$$0 < \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq \frac{c+a-b+a+b-c}{2} = a$$

$$0 < \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq \frac{a+b-c+b+c-a}{2} = b$$

Nhân vế với các vế bất đẳng thức trên ta được đpcm.

b) Hiển nhiên $p - a > 0$, $p - b > 0$, $p - c > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}} \geq \frac{1}{\frac{p-a+p-b}{2}} = \frac{2}{c}$$

Tương tự : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\right) \geq \frac{2}{a}$, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-c}+\frac{1}{p-a}\right) \geq \frac{2}{b}$

Từ đó suy ra đpcm.

4.34. a) Ta có : $a + b = \frac{3}{2} \cdot \frac{2(a+b)}{3}$

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}(a+b)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{3}+a+b}{2}$$

. Tương tự : $\sqrt{b+c} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{3}+b+c}{2}$; $\sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{3}+c+a}{2}$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}\left[\frac{2+2(a+b+c)}{2}\right] = \sqrt{\frac{3}{2}}.2 = \sqrt{6}$$

b) $\Leftrightarrow \quad 2(a+b+c)\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geq 9$

$\Leftrightarrow \quad \ldots\ldots\left[\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right] \geq 9$

Bất đẳng thức cuối đúng xem câu a) bài 4.5)

4.35. a) $(a+b+c)^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\right)^2 \quad (*)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi – Svac cho vế phải (*)

Ta được : $(a+b+c)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\right)(b+c+c+a+a+b)$

$\Rightarrow$ đpcm.

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có : $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 3$

Theo bất đẳng thức Côsi – Svac

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\cdot 1+\frac{b}{c}\cdot 1+\frac{c}{a}\cdot 1\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)(1^2+1^2+1^2)$$

$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq \frac{1}{3}\cdot 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$ Đpcn

4.36. a) Với n = 1: $\frac{a+b}{2} \geq \frac{a+b}{2}$ đúng

Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là ta có : $\frac{a^k + b^k}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^k$

Ta phải chứng minh : $\frac{a^{k+1} + b^{k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1}$. Ta có :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^k \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^k+b^k}{2}\right) \quad (*)$$

$$(a+b)(a^k+b^k) = a^{k+1} + b^{k+1} + ab^k + ba^k \quad (**)$$

Vì a, b ≥ 0 nên a − b và $a^k - b^k$, $k \in N$ là cùng dấu :

$$(a-b)(a^k - b^k) \geq 0 \iff a^{k+1} + b^{k+1} \geq ab^k + ba^k$$

Thay vào (**) ta có : $(a+b)(a^k+b^k) \leq 2(a^{k+1} + b^{k+1})$

Sử dụng kết quả trên trong (*) ta suy ra đpcm.

b) Với n = 1 ta có $1 + x > 1 + \frac{1}{4}$ (vì x ≥ 1)

Với n = 2 ta có $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + \frac{2^2}{4}$

Giả sử bất đẳng thức đúng với n = k, nghĩa là ta có :

$$(1+x)^k \geq 1 + \frac{k^2}{4} \quad (*)$$

Ta phải chứng minh $(1+x)^{k+1} \geq 1 + \frac{(k+1)^2}{4}$ (**)

Thật vậy; theo giả thiết qui nạp (*) ta có với

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k \geq (1+x)\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$$

$$(1+x)\left(1+\frac{k^2}{4}\right) = 1 + \frac{k^2}{4} + x + \frac{k^2x}{4} > 1 + \frac{k^2}{4} + \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{(k+1)^2}{4}$$

Tức là (**) đúng.

4.37. a) Giả sử ngược lại có ít nhất một trong 3 số a, b, c không dương. Không giảm tính tổng quát ta giả sử a ≤ 0.

Từ điều kiện abc > 0 suy ra a ≠ 0, tức phải có : a < 0, bc < 0

Từ giả thiết ab + bc + ca > 0 suy ra a(b + c) > 0

Vì a < 0 nên b + c < 0 Do đó a + b + c < 0

Trái với giả thiết a + b + c > 0. Vậy chỉ có thể a > 0, b > 0, c > 0.

4.38. $A = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (x + y)^2 - 8$

Tích xy = 4 nên x + y nhỏ nhất khi x = y = 2

Min A = 8 đạt được khi x = y = 2.

4.39. a) $f(x) = 2 + x + \frac{1}{x} \geq 2 + 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 4$

Min f(x) = 4 đạt khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.

b) $g(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2}$

Theo bất đẳng thức Côsi : $g(x) \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

Min $g(x) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$ đạt được khi $\frac{x}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$.

4.40. a) $f(x) = x^3(2 - x)^5 = \frac{3^3}{5^3} \cdot \left(\frac{5}{3}x\right)^3 \cdot (2 - x)^5$

$$\leq \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left\{\frac{1}{8}\left[3\left(\frac{5}{3}x\right) + 5(2 - x)\right]\right\}^8 = \frac{3^3.5^5}{4^8}$$

Max $f(x) = \frac{3^3.5^5}{4^8}$ đạt được khi $\frac{5}{3}x = 2 - x \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$.

b) $g(x) \geq 0\ \forall x \in [-2; 5]$. Do đó g(x) đạt max khi và chỉ khi $[g(x)]^2$ đạt max

$[g(x)]^2 = 7 + 2\sqrt{(2 + x)(5 - x)}$

Vì (2 + x) + (5 − x) = 7 là hằng số (2 + x)(5 − x) đạt max khi và chỉ khi

$$2 + x = 5 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3}{2}$$

Max $[g(x)]^2 = 7 + 2\sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2}} = 14 \quad \Rightarrow \quad$ Max $g(x) = \sqrt{14}$.

4.41. a) $A = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{x - 2}}{2\sqrt{2}\ x} + \frac{2\sqrt{5}\sqrt{y - 5}}{2\sqrt{5}\ y}$

$$\leq \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(2 + x - 2)}{2\sqrt{2}\ x} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}(5 + y - 5)}{2\sqrt{5}\ y} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Max A $= \dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10}$ đạt được khi $2 = x - 2,\ 5 = y - 5$

tức là khi $x = 4,\ y = 10$.

b) $B = x(1 - x) + y(1 - 3y) = x(1 - x) + \dfrac{1}{3}3y(1 - 3y)$

$$\le \left(\frac{x + 1 - x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3y + 1 - 3y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

Max B $= \dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x = 1 - x,\ 3y = 1 - 3y \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{1}{6}$.

1.42. Theo bất đẳng thức Côsi – Svac

$$7^2 = (3x - 5y)^2 = \left(\frac{3}{2}\cdot 2x - 5y\right)^2 \le \left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + (-5)^2\right][(2x)^2 + y^2]$$

$$\Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 \ge \frac{49}{\dfrac{9}{4} + 25} = \frac{196}{109}$$

Min A $= \dfrac{196}{109}$ đạt được khi $\dfrac{2x}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{y}{-5},\ 3x - 5y = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{196}{109},\ y = -\dfrac{140}{109}$.

1.43. a) $|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \le |a - b| + |b - c|$.

b) $|a| = |a + b + (-b)| \le |a + b| + |-b| \Rightarrow \quad |a| - |b| \le |a + b|$.

c) $|a| = |(a - b) + b| \le |a - b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \le |a - b|$ (*)

Mặt khác $|a - b| = |a + (-b)| \le |a| + |-b| = |a| + |b|$ (**)

Từ (*) và (**) ta có đpcm.

1.44. Ta có : $|a| + |b| > |a + b| \quad \forall a,b \in R$

$\Rightarrow \quad |a + b|(|a| + |b|) + |a| + |b| \ge |a + b| + |a + b|(|a| + |b|)$

$\Rightarrow \quad (|a| + |b|)(1 + |a + b|) \ge |a + b|(1 + |a| + |b|)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{|a|+|b|}{1 + |a|+|b|} \ge \dfrac{|a + b|}{1 + |a + b|}$.

1.45. Ta có : $|x - 1975| = \begin{cases} -x + 1975 & \text{nếu } x < 1975 \\ x - 1975 & \text{nếu } x \ge 1975 \end{cases}$

$$|x - 2005| = \begin{cases} -x + 2005 & \text{nếu } x \le 2005 \\ x - 2005 & \text{nếu } x > 2005 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 3980 & \text{nếu } x < 1975 \\ 30 & \text{nếu } 1975 \le x \le 2005 \\ 2x - 3980 & \text{nếu } x > 2005 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Min $f(x) = 30$ đạt được khi $1975 \le x \le 2005$.

§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất 1 ẩn

4.52. **a)** $R \setminus \{-1; 2\}$. **b)** $[-4; +\infty) \setminus \{-3; -2\}$.

4.53. **a)** ĐKXĐ : $x = \frac{5}{2}$. Tập nghiệm : $x = \frac{5}{2}$.

b) ĐKXĐ : $x > 2$. Mọi x thỏa mãn ĐKXĐ đều là nghiệm

c) $5 - 4x + x^2 = 1 + (2 - x)^2 > 0 \ \forall x \in R$

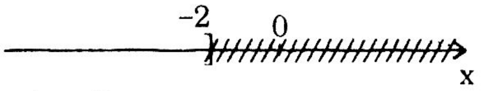
$x^2 - 2x + 2 = 1 + (x - 1)^2 > 0 \ \forall x \in R$

$\Rightarrow$ ĐKXĐ : $\forall x \in R$. Vế trái có giá trị lớn hơn 2 với mọi $x \in R$. B phương trình vô nghiệm.

4.54. **a)** Không tương đương vì $x = 2$ là nghiệm của bất phương trình t nhất nhưng không nghiệm đúng bất phương trình thứ hai.

b) Tương đương vì bất phương trình thứ hai suy ra từ bất phương trì thứ nhất bằng cách chia hai vế cho $x^2 - x + 1 > 0 \ \forall x \in R$.

4.55. **a)** $x \in (-\infty; -2]$



b) $x \in (-5; +\infty)$ Bạn tự vẽ.

c) $x \in \left(\frac{19}{3}; +\infty\right)$. **d)** $x \in \left(-\infty; \frac{25}{13}\right]$.

4.56. (1) $\Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$; (2) $\Leftrightarrow (2m - 3)x > m + 5$

- Nếu $m > \frac{3}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow x > \frac{m + 5}{2m - 3}$
- Nếu $m < \frac{3}{2}$ thì (2) $\Leftrightarrow x < \frac{m + 5}{2m - 3}$
- Nếu $m = \frac{3}{2}$ thì (2) trở thành $0x > \frac{13}{2}$ vô nghiệm.

Vậy (1) và (2) tương đương khi : $\begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} = \frac{m + 5}{2m - 3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{31}{12}$.

.57. (1) $\Leftrightarrow \quad x < -1$; (2) $\Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{5}{2}$; (I) $\Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{5}{2}; -1\right)$.

.58. a) $\Leftrightarrow \quad (m - 1)x > 2 - 3m$

- Nếu $m > 1$ thì $x > \dfrac{2 - 3m}{m - 1}$
- Nếu $m < 1$ thì $x < \dfrac{2 - 3m}{m - 1}$
- Nếu $m = 1$ bất phương trình trở thành $0x > -1$

Mọi $x \in R$ đều là nghiệm của bất phương trình.

b) ĐK : $m \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (m + 2)x > \dfrac{2}{m}$

- Nếu $m > -2$ thì $x > \dfrac{2}{m(m + 2)}$
- Nếu $m < -2$ thì $x < \dfrac{2}{m(m + 2)}$
- Nếu $m = -2$ bất phương trình trở thành $0x > -1$

Mọi $x \in R$ đều là nghiệm của bất phương trình.

.59. (1) $\Leftrightarrow \quad x < \dfrac{2}{5}$

(2) $\Leftrightarrow \quad (m - 1)x > 2 + 3m$

- Nếu $m > 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \quad x > \dfrac{2 + 3m}{m - 1}$

(I) vô nghiệm nếu $\left(-\infty; \dfrac{2}{5}\right) \cap \left(\dfrac{2 + 3m}{m - 1}; +\infty\right) = \varnothing$

Điều này xảy ra nếu : $\begin{cases} m > 1 \\ \dfrac{2 + 3m}{m - 1} \geq \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \quad m > 1$

Như vậy với $m > 1$ hệ (I) vô nghiệm

- Nếu $m < 1$ thì (2) $\Leftrightarrow \quad x < \dfrac{2 + 3m}{m - 1}$

$\left(-\infty; \dfrac{2}{5}\right) \cap \left(-\infty; \dfrac{2 + 3m}{m - 1}\right) \neq \varnothing$ Hệ (I) luôn có nghiệm

- Nếu $m = 1$ thì (2) trở thành $0x > 5$ vô nghiệm do đó hệ (I) vô nghiệm.

Kết luận : Với $m \geq 1$ hệ (I) vô nghiệm.

§3. Dấu của nhị thức

4.66. **a)** $f(x) > 0$ với $x \in \left(-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$; $f(x) < 0$ với $x \notin \left[-\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

b) $g(x) = \frac{11x + 1}{3x + 2}$; $g(x) < 0$ với $x \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{11}\right)$.

$g(x) > 0$ với $x \notin \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{11}\right]$.

4.67. **a)** $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

$x^2 - 7x + 6 < 0$ với $x \in (1; 6)$

$x^2 - 7x + 6 > 0$ với $x \notin [1; 6]$.

b) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x - 1)(x + 2)(x + 3) = f(x)$

$f(x) < 0$ với $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; 1)$

$f(x) > 0$ với $x \in (-3; -2) \cup (1; +\infty)$.

c) $g(x) = x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 7x - 10 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x + 5)$

$g(x) < 0$ với $x \in (-5; -2) \cup (-1; 1)$

$g(x) > 0$ với $x \in R \setminus \{(-5; -2) \cup (-1; 1)\}$.

d) $\frac{x^2 - 7x + 10}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(x - 2)(x - 5)}{(2x + 1)(x + 2)} = h(x)$

$h(x) < 0$ với $x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; 5)$

$h(x) > 0$ với $x \in R \setminus \left\{\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (2; 5)\right\}$.

4.68. **a)** $\Leftrightarrow \quad \frac{4x - 3}{x + 2} - 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x - 5}{x + 2} > 0$

Tập nghiệm : $T = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

b) $\Leftrightarrow \quad \frac{2x + 3}{5 - x} - 1 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x - 2}{5 - x} \le 0$

Tập nghiệm $T = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (5; +\infty)$.

c) Tập nghiệm $T = \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$.

d) $T = \left(-1; -\frac{2}{5}\right) \cup (3; +\infty)$.

4.69. a) $\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq -\dfrac{5}{2} \\ 2x + 5 + 3x = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x < -\dfrac{5}{2} \\ -2x - 5 + 3x = 4 \end{cases}$

Tập nghiệm $T = \left\{-\dfrac{1}{5}\right\}$.

b) $\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < -\dfrac{5}{2} \\ -x + 7 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -\dfrac{5}{2} \leq x \leq \dfrac{2}{3} \\ -5x - 3 = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x > \dfrac{2}{3} \\ x - 7 = 4 \end{cases}$

Tập nghiệm $T = \left\{-\dfrac{7}{5}; 11\right\}$.

4.70. a) $\Leftrightarrow \quad -5 < 2x + 3 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 1.$

b) $\begin{cases} 5 + x > 0 \\ -5 - x < 3x - 2 < 5 + x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{7}{2}.$

c) $x + 1 \leq 0$ hoặc $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x \leq 3 \\ -x + 3 > x + 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x > 3 \\ x - 3 > x + 1 \end{cases}$

Tập nghiệm của bất phương trình $T = (-\infty; 1)$.

4.71. a) $\Leftrightarrow \quad (m - 2)x < -m - 4$

- **Nếu $m > 2$, tập nghiệm** $T = \left(-\infty; \dfrac{-m-4}{m-2}\right)$
- **Nếu $m < 2$, tập nghiệm** $T = \left(\dfrac{-m-4}{m-2}; +\infty\right)$
- **Nếu $m = 2$, vô nghiệm.**

b) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{x - m}{mx - 1} - m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(1 - m^2)x}{mx - 1} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - m^2)x\,[mx - 1] < 0$

- **Nếu $m < -1$ thì $1 - m^2 < 0$ và $\dfrac{1}{m} < 0$** bất phương trình tương đương với $x(mx - 1) > 0$. Ta có bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{m}$		0		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$mx - 1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
VT		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình $T = \left(\frac{1}{m}; 0\right)$

- Nếu $-1 < m < 0$ bất phương trình vô nghiệm
- Nếu $m = 0$ tập nghiệm $T = (0; +\infty)$
- Nếu $0 < m < 1$ thì $1 - m^2 > 0$, $\frac{1}{m} > 0$ ta sẽ tìm được tập nghiện

  là : $T = \left(0; \frac{1}{m}\right)$
- Nếu $m = 1$ vô nghiệm
- Nếu $m > 1$ thì $1 - m^2 < 0$ và $\frac{1}{m} > 0$. Khi đó tập nghiệm là :

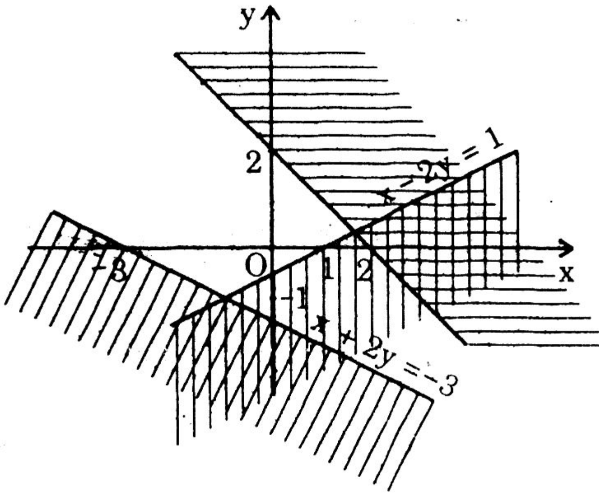
$$T = (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{m}; +\infty\right).$$

§4. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn

4.74. Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} y > \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ y > -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y < -x + 2 \end{cases}$$

Miền nghiệm là miền của mặt phẳng toạ độ không bị gạch sọc (không kể bờ) trong hình bên.



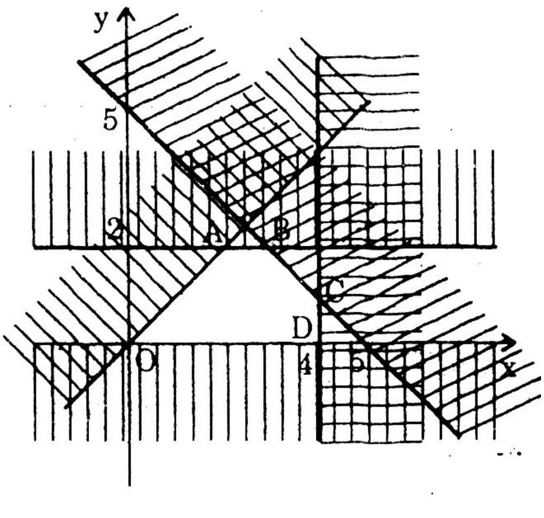
4.75. Miền nghiệm của bất phương trình đã cho là ngũ giác OABCD (bao gồm các điểm trên các cạnh)

Toạ độ các đỉnh là :

O(0; 0); A(2; 2); B(3; 2);

C(4; 1); D(4; 0)

Biểu thức $S = y - x$ đạt giá trị nhỏ nhất với cặp số (4; 0) độ đỉnh D.



§5. Dấu của tam thức bậc hai. Bất phương trình bậc hai

4.89. **a)** $f(x) > 0$ với $x \notin \left[-\frac{4}{3}; -1\right]$; $\quad f(x) < 0$ với $x \in \left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

b) $g(x) > 0$ với $x \in \left(-1; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 4\right)$;

$g(x) < 0$ với $x \in R \setminus \left\{\left(-1; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; 4\right)\right\}$.

c) $h(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-1)^2(x^2-2x-5)} = \dfrac{x^2+x-4}{(x-1)(x^2-2x-5)}$

$h(x) > 0$ với $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{17}}{2}; 1-\sqrt{6}\right) \cup \left(1; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1+\sqrt{6}; +\infty)$

$h(x) < 0$ với $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right) \cup (1-\sqrt{6}; 1) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; 1+\sqrt{6}\right)$.

4.90. **a)** $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-5) = m^2 - 4m + 6 > 0\ \forall m$ vì biệt thức của tam thức với biến m là $4^2 - 4.6 = -8 < 0$

$m^2 - 4m + 6$ luôn cùng dấu với hệ số của m^2 là 1.

b) Với $m \neq 1$: $\Delta = (3m-2)^2 - 4(m-1)(3-2m) = 17m^2 - 32m + 16$

Tam thức theo m : $17m^2 - 32m + 16$ có biệt thức $\Delta' = 16^2 - 17.16 < 0$ nên luôn cùng dấu với 17. Vậy $\Delta > 0\ \forall m$.

4.91. **a)** $\Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 2) = -m^2 + m - 1$, tam thức này có biệt thức $\Delta_1 = 1^2 - 4 < 0$ nên có dấu cùng với hệ số của m^2 là $-1 < 0$. Vậy $\Delta' < 0\ \forall m$. Phương trình vô nghiệm.

b) $\Delta = (\sqrt{3}m - 1)^2 - 4(m^2 - \sqrt{3}m + 2) = -m^2 + 2\sqrt{3}m - 7$

Biệt thức của Δ là $\Delta_1 = (\sqrt{3})^2 - 7 < 0$. Do đó $\Delta < 0\ \forall m$.

4.92. **a)** Tập nghiệm $T = (-\infty; 2) \cup \left(\frac{9}{2}; +\infty\right)$.

b) $-\frac{1}{3} < x < 7$.

4.93. **a)** $\left(-\frac{11}{5}; -\frac{1}{2}\right) \cup (3; 7)$. $\qquad$ **b)** $(9 - 4\sqrt{5}; 7 - 4\sqrt{3}) \cup (7 + 4\sqrt{3}; 9 + 4\sqrt{5})$.

4.94. $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-3} + 1 > 0 \quad (1) \\ \dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+5x-3} - 3 < 0 \quad (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2+2x-1}{2x^2+5x-3} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x < -1 \text{ hoặc } \frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \quad \frac{-5x^2-18+11}{2x^2+5x-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty; -3) \cup \left(\frac{-9-\sqrt{136}}{10}; \frac{-9+\sqrt{136}}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$$

Đáp số : Tập nghiệm : $\left(\frac{-9-\sqrt{136}}{10}; -1\right)$.

4.95. **a)** $m > 6$. **b)** $\begin{cases} a = m+2 > 0 \\ \Delta = 9(m+2)^2 - 4(m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < -\frac{6}{5}$

4.96. **a)** Bất phương trình $(m^2-1)x^2 + (2m-1)x + 3$ vô nghiệm khi và chỉ khi $f(x) = (m^2-1)x^2 + (2m-1)x + 3 \le 0 \ \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta = (2m-1)^2 - 12(m^2-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -8m^2 - 4m + 13 \le 0 \end{cases}$$

Hệ bất phương trình cuối vô nghiệm. Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

b) $(m+1)x^2 - 2(3-m)x + 2m + 1 \ge 0 \ \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta = (3-m)^2 - (m+1)(2m+1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m^2 - 9m + 8 \le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad m \ge \frac{-9+\sqrt{113}}{2}.$$

4.97. **a)** $mx^2 - (m+1)x + 3 \ge 0$ (1)

- Nếu $m = 0$: (1) trở thành $-x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3$
- Nếu $m \ne 0$, $\Delta = (m+1)^2 - 12m = m^2 - 10m + 1$

  $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 5 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m = 5 + 2\sqrt{6}$

  $\Delta > 0$ với $m < 5 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > 5 + 2\sqrt{6}$

  $\Delta \le 0$ với $5 - 2\sqrt{6} \le m \le 5 + 2\sqrt{6}$
- Nếu $m < 0$ thì $\Delta > 0$ tập nghiệm của (1) là :

$$T = \left[\frac{m+1-\sqrt{\Delta}}{2m}; \frac{m+1+\sqrt{\Delta}}{2m}\right]$$

- Nếu $0 < m \leq 5 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m \geq 5 + 2\sqrt{6}$ tập nghiệm (1) là :

$$T = \left(-\infty; \frac{m+1-\sqrt{\Delta}}{2m}\right] \cup \left[\frac{m+1-\sqrt{\Delta}}{2m}; +\infty\right)$$

- Nếu $5 - 2\sqrt{6} \leq m \leq 5 + 2\sqrt{6}$, $\forall x \in R$ đều là nghiệm.

b) $(mx - 2)(x - 1) < 0 \Leftrightarrow mx^2 - (m + 2)x + 2 < 0$ (2)

- Nếu $m = 0$ thì (2) trở thành $-2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $m \neq 0$, $\Delta = (m + 2)^2 - 8m = (m - 2)^2$
- $m = 2$: (2) vô nghiệm
- Nếu $m \neq 0$, $m \neq 2$ $mx^2 - (m + 2)x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{m}$
- Nếu $m < 0$ thì $\frac{2}{m} < 0 < 1$ tập nghiệm của (2) là :

$$T = \left(-\infty; \frac{2}{m}\right) \cup (1; +\infty)$$

- Nếu $0 < m < 2$ thì $\frac{2}{m} > 1$ tập nghiệm của (2) là : $T = \left(1; \frac{2}{m}\right)$
- Nếu $m > 2$ thì $\frac{2}{m} < 1$ tập nghiệm của (2) là : $T = \left(\frac{2}{m}; 1\right)$.

4.98. $x^2 + 7x - 8 < 0 \Leftrightarrow -8 < x < 1$

Xét bất phương trình (2) ta thấy :

- Nếu $(m^2 - 3m + 2) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = 2$

  thì $(m^2 - 3m + 2)x > 2$ (2) $\Leftrightarrow 0x > 2$ vô nghiệm
- Nếu $m < 1$ hoặc $m > 2$ thì $m^2 - 3m + 2 > 0$ và (2) $\Leftrightarrow x > \frac{2}{m^2 - 3m + 2}$

  Hệ (I) có nghiệm nếu $\frac{2}{m^2 - 3m + 2} < 1 \Leftrightarrow \frac{-m^2 + 3m}{m^2 - 3m + 2} < 0$

  Lập bảng xét dấu tích $\frac{(-m^2 + 3m)}{m^2 - 3m + 2} \equiv f(m)$

m	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$-m^2 + 3m$		−	0	+		+		+	0	−	
$m^2 - 3m + 2$		+		+	0	−	0	+		+	
$f(x)$		−	0	+	||	−	||	+	0	−	

Vậy hệ (I) có nghiệm nếu m < 0 hoặc m > 3

- Nếu 1 < m < 2 thì (2) $\Leftrightarrow \quad x < \dfrac{2}{m^2 - 3m + 2}$

Hệ (I) có nghiệm nếu $\dfrac{2}{m^2 - 3m + 2} > -8 \Leftrightarrow \dfrac{8m^2 - 24m + 18}{m^2 - 3m + 2} > 0$

Điều này không thể xảy ra vì 1 < m < 2 thì $m^2 - 3m + 2 < 0$

$8m^2 - 24m + 18 \geq 0$

Kết luận : Hệ (I) có nghiệm nếu m < 0 hoặc m > 3.

4.99. Do $2x^2 - x + 1 > 0\ \forall x \in R$ nên

$$1 \leq \frac{3x^2 - mx + 5}{2x^2 - x + 1} < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x + 1 \leq 3x^2 - mx + 5 \\ 3x^2 - mx + 5 < 12x^2 - 6x + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - (m-1)x + 4 \geq 0 & (1) \\ 9x^2 - (6-m)x + 1 > 0 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

(I) có tập nghiệm là R khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_1 = (m-1)^2 - 16 \leq 0 \\ \Delta_2 = (6-m)^2 - 36 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 15 \leq 0 \\ m^2 - 12m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 5 \\ 0 < m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < m \leq 5$$

Kết luận : Với 0 < m < 5 thì $\forall x \in R$ nghiệm đúng bất đẳng thứ kép.

4.100. $f(x) = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 2m - 6 = 0$ (1

- Nếu m = 2 thì (1) có nghiệm $x = -\dfrac{1}{3} < 2$
- Nếu $m \neq 2$ thì :

$af(x) = (m-2)(2m-18) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 < m < 9$

$\Delta_f = (m+1)^2 - (m-2)(2m-6) = -m^2 + 12m - 11$

$\Delta_f > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < m < 11$

$\dfrac{S}{2} - 2 = \dfrac{(m+1)}{m-2} - 2 = \dfrac{5-m}{m-2} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 2$ hoặc $m > 5$

Kết quả so sánh số 2 với các nghiệm của phương trình (1) tùy the giá trị của m được cho trong bảng sau :

m	Δ	af(2)	$\frac{S}{2}-2$	
$-\infty$	–	+		Vô nghiệm
1	0			$x_1 = x_2 = -2 < 2$
	+	+		$x_1 < x_2 < 2$
2		0	0	$x_1 = x_2 = -\frac{1}{3} < 2$
	+	–		$x_1 < 2 < x_2$
5			0	
	+	–		$x_1 < 2 < x_2$
9		0		$x_1 < x_2 = 2$
	+	+		$x_1 < x_2 < 2$
11	0			$x_1 = x_2 = \frac{4}{3} < 2$
$+\infty$	–	+		Vô nghiệm

4.101.a) $af(3) = m^2 - 3(2m + 3) + 9 = m^2 - 6m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < m < 6.$

b) $-1 < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \Delta = -3m^2 - 2m + 2 > 0 \\ af(-1) = 3(m-1)(m-2) > 0 \\ \frac{S}{2} + 1 = \frac{3m-7}{2(m-1)} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -3 < m < 1.$

4.102.a) $x_1 < 0 < x_2 < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} af(0) = m(m+5) < 0 \\ af(2) = m(m+1) > 0 \\ \frac{S}{2} - 2 = \frac{-m+1}{m} < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -5 < m < -1.$

b) $-6 < x_1 < 4 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} af(4) = (m-2)(10m-35) < 0 \\ af(-6) = (m-2)(50m-75) > 0 \\ \frac{S}{2} + 6 = \frac{7m-12}{m-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 2 < m < \frac{7}{2}$

§6. Một số phương trình, bất phương trình quy về bậc hai

4.106.a) Đặt $x^2 = t \geq 0$ ta có :

$$3t^2 + 5t - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{3} \text{ (nhận)},\ t = -2 \text{(loại)} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Đặt $x + 4 = y$ ta được : $(y-1)^4 + (y+1)^4 = 2$

$$\Rightarrow \quad y^4 + 6y = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4$$

4.107. Đặt $x^2 = t \geq 0$. Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt

Nếu $t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0$ có 2 nghiệm dương.

$$\Delta' = (m+1)^2 - (2m+1) = m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq 0$$

$$t^2 - 2(m+1)t + 2m + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2m + 1$$

$$t_2 = 2m + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -\frac{1}{2}$$

Đáp số : $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; +\infty)$.

4.108. $\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + m + 2 = |x+1| \qquad (1)$

ĐKXĐ : $x^2 + 2x + m + 2 \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow \quad (A)\begin{cases} x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \\ x < -1 \\ x^2 + 2x + m + 2 = -2x - 2 \end{cases} \quad \text{hoặc } (B)\begin{cases} x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \\ x \geq -1 \\ x^2 + 2x + m + 2 = 2x + 2 \end{cases}$$

Phương trình $x^2 + 2x + m + 2 = -2x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + m + 4 = 0$

có biệt thức $\Delta' = -m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 0$ khi đó nó có các nghiệm là $-2 \pm \sqrt{-m}$

Phương trình $x^2 + 2x + m + 2 = 2x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + m = 0$

với $m < 0$ nó có các nghiệm $x = \pm\sqrt{-m}$

Như vậy (1) có 4 nghiệm nếu m thỏa mãn hệ bất phương trình

$$\begin{cases} m < 0 \\ -2 \pm \sqrt{-m} < -1 \\ \pm\sqrt{-m} > -1 \\ x^2 + 2x + m + 2 \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m < 0 \\ -\sqrt{-m} > -1 \\ -2 + \sqrt{-m} < -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < m < 0$$

Kết luận : Nếu $-1 < m < 0$ thì (1) có 4 nghiệm phân biệt.

4.109. $|x^2 - 2x - 8| > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$ hoặc $\begin{cases} x \geq 0 \\ (x^2 - 2x - 8)^2 > 4x^2 \end{cases}$

$$(x^2 - 2x - 8)^2 > 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 - 2x - 8 + 2x)(x^2 - 2x - 8 - 2x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x < +2\sqrt{2} \text{ hoặc } x > 2 + 2\sqrt{3}$$

Tổng hợp kết quả : Tập nghiệm của bất phương trình là :

$$T = (-\infty; 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{3}; +\infty).$$

4.110.a) $x - \sqrt{2x+7} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x - 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ 2x + 7 = (x-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 9$$

b) $$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{2x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \sqrt{(5x-1)(2x-3)} = 1 - 2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ 1 - 2x \geq 0 \\ (5x-1)(2x-3) = (1-2x)^2 \end{cases}$$ hệ này vô nghiệm

Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

4.111. $\Leftrightarrow 3\sqrt{x-m} = 2x - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 \geq 0 \\ 9(x-m) = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x^2 - 25x + 16 + 9m = 0 \ (*) \end{cases}$$

Phương trình (*) có biệt thức $\Delta = 25^2 - 16(16 + 9m) = 9(41 - 16m)$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{41}{16}$. Khi đó (*) có các nghiệm : $x_{1,2} = \dfrac{25 \pm 3\sqrt{41-16m}}{8}$

Với $m \leq \dfrac{41}{16}$ thì $\dfrac{25 + 3\sqrt{41-16m}}{8} \geq \dfrac{25}{8} > 3 > m$. Phương trình đã cho có nghiệm.

4.112. ĐKXĐ : $x \neq 0$, $-3x^2 + x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$, $x \neq 0$

- Rõ ràng mọi x thỏa mãn $-1 < x < 0$ đều nghiệm đúng bất phương trình.
- Với $0 < x < \dfrac{4}{3}$ bất phương trình tương đương với $\sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2x - 2$

$$\begin{cases} 0 < x < \dfrac{4}{3} \\ \sqrt{-3x^2 + x + 4} < 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \dfrac{4}{3} \\ 2x - 2 > 0 \\ -3x^2 + x + 4 < (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{9}{7} < x < \dfrac{4}{3}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là : $T = [-1; 0) \cup \left(\dfrac{9}{7}; \dfrac{4}{3}\right]$.

4.113. $\Leftrightarrow \quad x - 1 - m\sqrt{x-1} - m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t^2 - mt - m > 0 \\ \sqrt{x-1} = t \geq 0 \end{cases} \quad (I)$

Xét các trường hợp $m < 0$, $m = 0$, $m > 0$ hệ (I) đều có nghiệm $t \geq 0$. Vậy bất phương trình luôn có nghiệm với mọi $m \in R$.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

4.114.a) $a^2 + b^2 + 4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + 4) + \frac{1}{2}(b^2 + 4) \geq ab + 2(a + b)$.

b) $\Leftrightarrow a^2(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1) - 2(\sqrt{a} - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - 1)[a^2(\sqrt{a} + 1) - 2] \geq 0 \quad \forall a \geq 0$.

c) Từ $(a + b)^2 \geq 4ab \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{4}$ suy ra đpcm.

d) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad < bc \quad \Leftrightarrow \quad ad + ab < ab + bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad < bc \quad \Leftrightarrow \quad ad + ab < ab + bc \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

4.115.a) Với $n = 2$ ta có $a^2 = b^2 + c^2$. Mệnh đề đúng.

Giả sử đúng với $n = k$

$$a^k \geq b^k + c^k$$

Khi đó $a^{k+1} = a^k . a \geq a(b^k + c^k) \geq b^{k+1} + c^{k+1}$

Vậy mệnh đề đúng với mọi $n \geq 2$.

b) Bất đẳng thức đúng với $n = 1$

Giả sử nó đúng với $n = k$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$$

Khi đó : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}}$

$$\frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} < \frac{k + k + 1 + 1}{\sqrt{k+1}} = 2\sqrt{k+1}$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

4.115.a) $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \ge \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{1.x^3.y^3}}}{xy} = \sqrt{\frac{3}{xy}}$

$$\Rightarrow \quad VT \ge \sqrt{\frac{3}{xy}} + \sqrt{\frac{3}{yz}} + \sqrt{\frac{3}{xz}} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{3^3}{x^2y^2z^2}}} = 3\sqrt{3}\,.$$

b) Áp dụng $\frac{1}{a+b} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Ta được :

$$\frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{y+z}\right) \le \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \quad VT \le \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}\right) = 1\,.$$

4.117. Ta có : $\frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{3},\ \frac{1}{h_b} = \frac{b}{3},\ \frac{1}{h_c} = \frac{c}{3}$

$$\Rightarrow \quad VT = \frac{1}{3}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \ge \frac{9}{3} = 3\,.$$

4.118.a) $x + \frac{2}{x-3} = 3 + (x-3) + \frac{2}{x-3} \ge 3 + 2\sqrt{(x-3).\frac{2}{x-3}} = 3 + 2\sqrt{2}$

Đạt giá trị nhỏ nhất bằng $3 + 2\sqrt{2}$ khi

$$x - 3 = \frac{2}{x-3} \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 + \sqrt{2}\,.$$

b) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} \ge \frac{2\sqrt{xy}}{xy} = \frac{2}{\sqrt{xy}} \ge \frac{2}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}} = 2$

Đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = y = 1$.

c) $7^2 = (\sqrt{2}.\sqrt{2}x + \sqrt{3}.\sqrt{3}y)^2 \le [(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2][2x^2 + 3y^2]$

$\Rightarrow 2x^2 + 3y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{49}{5}$ khi $x = y = \frac{7}{5}$.

4.119.a) $[f(x)]^2 = 16 + 2\sqrt{(10-x)(x+6)}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 32 khi

$$10 - x = x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Suy ra f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng $4\sqrt{2}$.

b) $(1.\sqrt{x-1} + 1.\sqrt{2x-3} + 1.\sqrt{7-3x})^2 \le (1^2 + 1^2 + 1^2)(x - 1 + 2x - 3 + 7 - 3x)$

$\Rightarrow$ Biểu thức đạt giá trị lớn nhất bằng 3 khi $x = 2$.

c) $(x\sqrt{y+1} + y\sqrt{x+1})^2 \le (x^2 + y^2)(y + 1 + x + 1) = (x + y + 2)$

$2 + x + y \le 2 + \sqrt{1^2 + 1^2}.\sqrt{x^2 + y^2} = 2 + \sqrt{2}$

Biểu thức đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ khi $x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4.120. Đáp số : **a)** $T = \left(-1; -\dfrac{2}{7}\right]$.

b) $T = \left(\dfrac{1}{2}; 1\right) \cup [3; +\infty)$.

4.121.a) $\Leftrightarrow \quad (m - 2)x > 3m - 8$

- Nếu $m < 2$, tập nghiệm là $x < \dfrac{3m - 8}{m - 2}$
- Nếu $m = 2$ ta có $0x > -2$ đúng với $\forall x \in R$
- Nếu $m > 2$, tập nghiệm $x > \dfrac{3m - 8}{m - 2}$.

b) $\Leftrightarrow \quad \dfrac{m}{m - 1}x > 2$

- Nếu $m < 0 \Rightarrow x > \dfrac{2(m - 1)}{m}$
- Nếu $m = 0$ vô nghiệm
- Nếu $0 < m < 1$: $T = \left(-\infty; \dfrac{2(m - 1)}{m}\right)$
- Nếu $m > 1$ tập nghiệm $T = \left(\dfrac{2(m - 1)}{m}; +\infty\right)$.

4.122. Xét dấu của $f(x) = (x - 2m - 3)(x - m + 2)$ với $x \ne m - 2$

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2m + 3$ hoặc $x_2 = m - 2$

$x_1 - x_2 = (2m + 3) - (m - 2) = m + 5 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > -5$

Nếu $m < -5$ thì $x_1 < x_2$. $\quad f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 < x < x_2$

Để $x \in [1; 2]$ nghiệm đúng (1) ta phải có $2m + 3 < 1 < 2 < m - 2$

Hệ $\begin{cases} 2m + 3 < 1 \\ m - 2 > 2 \end{cases}$ vô nghiệm. Vậy $m < -5$ không thỏa mãn.

Nếu $m = -5$ thì (1) trở thành $\dfrac{x + 7}{x + 7} < 0$ vô nghiệm.

Nếu $m > -5$ thì $x_2 < x_1$ để $x \in [1; 2]$ nghiệm đúng (1) ta phải có :

$$m - 2 < 1 < 2 < 2m + 3$$

$$\begin{cases} m - 2 < 1 \\ 2m + 3 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} < m < 3$$

Kết luận : nếu $m \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$ thì (1) nghiệm đúng $\forall x \in [1; 2]$.

4.123. Tam thức $3x^2 - x + 1$ có biệt thức $\Delta = 1^2 - 4.3 < 0$ nên dương với mọi $x \in R$. Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x + 1 \le 3x^2 - mx + 5 \\ 3x^2 - mx + 5 \le 6(3x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - m)x + 4 \ge 0 \\ 15x^2 + (m - 6)x + 1 \ge 0 \end{cases}$$

$\forall x \in R$ nghiệm đúng hệ bất phương trình cuối khi và chỉ khi $m = 1$.

4.124.a) Bài toán tương đương với tìm giá trị của m để $\forall x \in R$ nghiệm đúng

$$(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m + 2 > 0 \\ \Delta = (m - 1)^2 - 4(m + 2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \le m \le 7.$$

b) Đáp số : $-22 \le m \le 2$.

4.125.a)
- Nếu $m = -1$ tập nghiệm $T = (-\infty; 1]$
- $m \ne -1$, $\Delta = -m^2 - 2m > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \le m \le 0$
- Nếu $m \le -2$ $\forall x \in R$ đều nghiệm đúng bất phương trình
- Nếu $-2 < m < -1$: Tập nghiệm $\left(-\infty; \dfrac{m - \sqrt{\Delta}}{m + 1}\right] \cup \left[\dfrac{m + \sqrt{\Delta}}{m + 1}; +\infty\right)$
- Nếu $-1 < m < 0$: Tập nghiệm $\left[\dfrac{m - \sqrt{\Delta}}{m + 1}; \dfrac{m + \sqrt{\Delta}}{m + 1}\right]$.
- Nếu $m = 0$: Bất phương trình $\Leftrightarrow$ $x = 0$
- Nếu $m > 0$: Bất phương trình vô nghiệm.

b) (1) $\Leftrightarrow$ $1 \le x \le 7$,

(2) $\Leftrightarrow$ $m \le x \le m + 1$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $[1; 7] \cap [m; m + 1] \ne 0$ $\Leftrightarrow$ $0 \le m \le 7$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ $m = 0$ hoặc $m = 7$.

4.126. $\Delta = m^2 - 16m < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < m < 16$

$af(1) = 4m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0;$

$\frac{S}{2} - 1 = \frac{m+1}{2} - 1 = \frac{m}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 0$

Kết quả : Nếu $m < 0$ thì $x_1 < 1 < x_2$

Nếu $m = 0$ thì $x_1 = x_2 = 1$

Nếu $0 < m < 16$ vô nghiệm

Nếu $m = 16$, $x_1 = x_2 = 9 > 1$

Nếu $m > 16$ thì $1 < x_1 < x_2$

với $x_1 = \frac{-m - 2 - \sqrt{\Delta}}{2}$ và $x_2 = \frac{-m - 2 - \sqrt{\Delta}}{2}$.

4.127.a) $\begin{cases} af(1) = -m - 1 < 0 \\ af(2) = -3m - 2 > 0 \\ \frac{S}{2} - 2 = m < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -1 < m < -\frac{2}{3}.$

b) $\begin{cases} \Delta = (m-1)^2 - (m+1)(m^2 + 4m - 5) > 0 \\ af(2) = (m+1)(m^2 + 4m + 3) > 0 \\ \frac{S}{2} - 2 = \frac{m-1}{m+1} - 2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad -2 < m < -1.$

Chương V. THỐNG KÊ

§1. Bảng phân phối thực nghiệm tần số tần suất

5.3. **a)** Dấu hiệu : Trọng lượng của học sinh THCS.

Kích thước (cỡ) của mẫu n = 30 Số giá trị khác nhau là 7. Đó là cá giá trị 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43.

b) Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc :

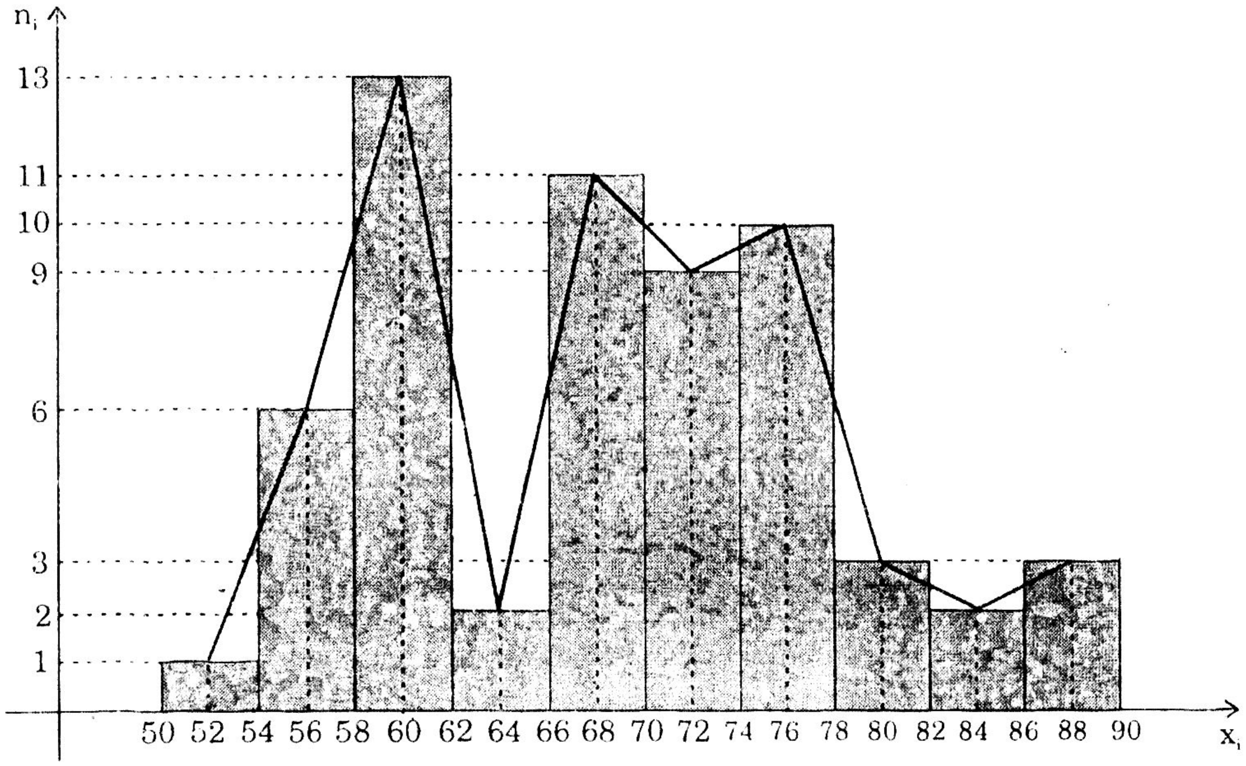
x_i	37	38	39	40	41	42	43
n_i	2	4	5	5	7	4	3

c) Bạn tự vẽ biểu đồ.

5.4. **a)** Bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp :

Thứ tự i	Lớp thứ i	Giá trị đại diện	Tần số	
1	[50; 54)	52	1	
2	[54; 58)	56	6	
3	[58; 62)	60	13	
4	[62; 66)	64	2	
5	[66; 70)	68	11	
6	[70; 74)	72	9	
7	[74; 78)	76	10	
8	[78; 82)	80	3	
9	[82; 86)	84	2	
10	[86; 90]	88	3	$\sum n_i = 60$

b) Biểu đồ hình cột chữ nhật và đa giác tần số được vẽ trên cùng một hệ trục như hình dưới.



5.8. **a)** Bảng phân phối tần số :

x_i	16	17	18	19	20	21	24
n_i	8	11	15	15	7	4	1

$\sum n_i = 60$

Mẫu số liệu có 2 mốt $Mo_1 = 18$ và $Mo_2 = 19$.

b) Số trung bình :

$$\bar{x} = \frac{1}{60}[8.16 + 11.17 + 15.18 + 15.19 + 6.20 + 4.21 + 24] = 18{,}3.$$

c) Phương sai :

$$S^2 = \frac{1}{60}[8.16^2 + 11.17^2 + 15.18^2 + 15.19^2 + 6.20^2 + 4.21^2 + 24^2] - \bar{x}^2$$

$$\approx 2{,}4767$$

Độ lệch chuẩn $S = \sqrt{S^2} \approx 1{,}5737$.

5.9. a) Trước hết ta sắp dãy số liệu theo thứ tự không giảm :

39 41 50 50 54 58 60 61 65 68

72 72 72 75 75

- Cỡ mẫu là $n = 15 = 2.7 + 1$. Giá trị x_8 trong dãy không giảm là 61.

Vậy số trung vị : $Me = 61$

- Mốt $Mo = 72$
- Số trung bình : $\bar{x} = 60{,}8$
- Phương sai : $S^2 \approx 133{,}63$
- Độ lệch chuẩn : $S \approx 11{,}56$

5.10. a) Bảng phân phối tần số ghép lớp :

Thứ tự	Lớp	Giá trị đại diện	Tần số
1	[40; 44)	42	6
2	[44; 48)	46	10
3	[48; 52)	50	31
4	[52; 56)	54	17
5	[56; 60)	58	13
6	[60; 64)	62	2
			79

b) Số trung bình : $\bar{x} \approx 51{,}37$

Phương sai : $S^2 \approx 22{,}64$

Độ lệch chuẩn : $S \approx 4{,}76$.

Chương VI. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Góc và cung lượng giác

6.6. $25^0 = \frac{5\pi}{36}$, $\quad 127^0 30' = \frac{17\pi}{24}$,

$-480^0 = -\frac{8\pi}{3}$, $\quad 1845^0 = \frac{41\pi}{4}$

6.7. $3{,}9(\text{rad}) = 3{,}9.\frac{180}{\pi} \approx 223^0 27'$, $\quad \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}\cdot\frac{180}{\pi} = 33^0 45'$.

6.8. $-1200 \le 405 + k.360 \le 1200,\ k \in Z$

$\Leftrightarrow \quad -1605 \le k.360 \le 795 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1605}{360} \le k \le \frac{795}{360}$

$\Rightarrow \quad k = -4, -3, -2, -1, 0\ 1, 2$

Các góc cần tìm có số đo theo thứ tự là :

$-1035^0, -675^0, -315^0, 45^0, 405^0, 765^0, 1125^0$.

6.9. Ta có : $(Ox, Oy) = (Ox, Ot) + (Ot, Oy) + m2\pi$

$(Ox, Oz) = (Ox, Ot) + (Ot, Oz) + n2\pi, \quad m, n \in Z$

$\Rightarrow \quad (Ox, Oy) + (Ox, Oz) = 2(Ox, Ot) + (Ot, Oy) + (Ot, Oz) + k2\pi \qquad (1)$

Vì Ot là tia phân giác của góc $\widehat{yOz}$ nên $(Oy, Ot) = (Ot, Oz)$

Suy ra $(Ot, Oz) = -(Ot, Oy)$ thay vào (1) ta có đpcm.

6.10. $\approx 49{,}09$cm; $\quad \approx 32{,}72$cm

6.11. Số đo cung dài 9cm là : $\frac{9}{10}(\text{rad}) \approx 51^0 34'$

Số đo cung dài 37cm là : $3{,}7(\text{rad}) \approx 211^0 59'$

6.12. **a)** Xem bài 6.2; **Đáp số** : $\approx 158^0 49'$.

b) Xem bài 6.1; **Đáp số** : $\approx 1{,}43(\text{rad})$, $\quad 115^0 \approx 2(\text{rad})$.

6.13. **a)** $1975^0 = 175^0 + 5.360^0$, $\quad 90^0 < 175^0 < 180^0$.

Vậy M nằm trong góc phần tư thứ hai.

b) $\frac{2006\pi}{19} = \frac{30}{19}\pi + 52.2\pi$; $\quad \frac{3\pi}{2} < \frac{30\pi}{19} < 2\pi$

Vậy M nằm trong góc phần tư thứ tư.

6.14. Giả sử sau thời gian t (phút) A ở vị trí A_t, B ở vị trí B_t.

Nếu lấy A là điểm gốc của đường tròn lượng giác thì

$$AA_t = 45t^0, \qquad AB_t = 120^0 + 60t^0$$

Khi A_t và B_t trùng nhau lần đầu thì ta có :

$$AB_t = AA_t + 360^0$$

$$\Leftrightarrow \quad 120 + 60t = 45t + 360 \quad \Leftrightarrow \quad 15t = -120 + 360$$

$$\Leftrightarrow \quad t = 16 \text{ (phút)}.$$

6.15. Một giờ kim phút vạch nên góc 360^0, kim giờ vạch nên góc $\frac{360}{12} = 30^0$

Như vậy một giờ kim phút OP vạch một góc hơn kim giờ 330^0. Hiện tại đồng hồ chỉ 8 giờ đúng tức là $(OP, OG) = 120^0$.

Gọi t là thời gian tính bằng giờ để hai kim tạo thành góc 180^0 lần đầu tiên là :

$$t = \frac{180 - 120}{330} = \frac{2}{11} \text{ giờ.}$$

§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác

6.24. • Ta có : $-225^0 + 360^0 = 180^0 - 45^0$

• $\sin(-225^0) = \sin(180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos(-225^0) = \cos(180^0 - 45^0) = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

• $\sin(-150^0) = \sin[-(180^0 - 30^0)] = -\sin(180^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2}$

$\cos(-150^0) = \cos 150^0 = \cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sin(510^0) = \sin(360^0 + 150^0) = \sin 150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

• $\cos 510^0 = \cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\sin\frac{21\pi}{4} = \sin\left(4\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

- $\cos\dfrac{21\pi}{4} = \cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Làm tương tự ta được :

$\sin\dfrac{8\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos\dfrac{8\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\sin\dfrac{29\pi}{6} = \dfrac{1}{2}, \qquad \cos\dfrac{29\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

6.25. **a)** Với $90^0 < x < 180^0$ thì $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\tan x < 0$, $\cot x < 0$

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$$

$$\tan x = -\frac{12}{5}, \qquad \cot x = -\frac{5}{12}.$$

b) $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$ thì $\sin x < 0$, $\cos x < 0$, $\tan x > 0$, $\cot x > 0$.

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = -\frac{15}{17}$$

$$\tan x = \frac{15}{8}, \qquad \cot x = \frac{8}{15}.$$

c) $\sin x = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \cot^2 x}} = -\sqrt{\dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$$\cos x = -\frac{1}{10}.$$

d) Đáp số : $\sin x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \qquad \cos x = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad \tan x = \dfrac{-1}{2}.$

6.26. $\tan x - \cot x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \tan x^2 - \tan x - 1 = 0$

Do $0 < x < 90^0$ nên

$$\tan x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$$

$$\sin x = \tan x.\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}.$$

6.27. a) $3^2 = (\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x.\cot x$

$\Rightarrow \quad A = 9 - 2 = 7.$

b) $|\tan x - \cot x|^2 = (\tan x + \cot x)^2 - 4\tan x.\cot x = m^2 - 4$

$\Rightarrow \quad |\tan x - \cot x| = \sqrt{m^2 - 4} \quad m^2 \geq 4.$

c) Đặt $t = \sin^2 x$, thay vào điều kiện $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$ ta được :

$$3t^2 + (1 - t)^2 = \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4t^2 - 2t + \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad C = \sin^4 x + 3\cos^4 x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{7}{4}.$$

6.28. a) $A = -\sin x + \sin x + \cos x - \cos x = 0.$

b) $B = \cot(-x) + \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan x$

$= -\cot x + \cot x - \tan x + \tan x = 0.$

c) $C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x)$

$= 2\sin x - \cos x - \cos x = 2(\sin x - \cos x).$

d) $D = \cos(-90^0 + x) + \sin(90^0 - x) + \cos(90^0 + x) + \cos(-x)$

$= \cos(90^0 - x) + \sin(90^0 - x) - \sin x + \cos x$

$= \sin x + \cos x - \sin x + \cos x = 2\cos x.$

6.29. a) $A = \cos 135^0 - \cos(-135^0) + \tan(-45^0) + \cot 60^0$

$= \cos 135^0 - \cos 135^0 - \tan 45^0 + \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} - 1.$

b) $$B = \frac{\cos 36^0 - \sin(180^0 + 90^0 - 36^0)}{\sin(180^0 - 36^0) - \cos(90^0 + 36^0)} : \frac{\cos 54^0}{\sin 54^0} = \frac{2\cos 36^0.\sin 36^0}{2\sin 36^0.\cos 36^0} = 1$$

6.30. **a)** $VT = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = VP$.

b) $VT = \dfrac{\sin^2 x\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \dfrac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sin^2 x\cos^2 x$.

c) $VT = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \cot x.\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x + \cot x(1 + \cot^2 x) = VP$

d) $\Leftrightarrow \quad [\sin x + (\cos x - 1)][\sin x - (\cos x - 1)] = 2(1 - \cos x)\cos x$

$\Leftrightarrow \quad \sin^2 x - (\cos x - 1)^2 = 2\cos x(1 - \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos x)(1 + \cos x) - (1 - \cos x)^2 = 2\cos x(1 - \cos x)$

$\Leftrightarrow \quad (1 - \cos x)[1 + \cos x - (1 - \cos x)] = 2\cos x(1 - \cos 2x)$.

6.31. **a)** $VT = \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)[\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) - 1}$

$= \dfrac{-2\sin^2 x\cos^2 x}{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x - 1} = \dfrac{2}{3}$.

b) $VT = \dfrac{\sin^2 x\left(1 - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{\cos^2 x\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)} = \tan^2 x\dfrac{\tan^2 x}{\cot^2 x} = \tan^6 x$.

c) $VT = \dfrac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\tan x}{\cos x}$.

6.32. **a)** $A = \dfrac{1 - 2(1 - \cos^2 x)}{2\cos^2 x - 1} = \dfrac{-1 + 2\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1} = 1.$

b) $B = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$

c) $C = [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x - 1][\tan x + \cot x]^2$

$= -2\sin^2 x\cos^2 x\left(\dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x}\right)^2 = -2$.

d) $D = \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x + 2\cos^4 x - 1}{(\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) + 3\cos^4 x - 1}$

$= \dfrac{2\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{3\cos^2 x(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \dfrac{2}{3}$.

6.33. $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin x = 2\cos x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{8\cos^3 x - 2\sin^3 x + \cos x}{2\cos x - \sin^3 x} = \frac{8\cos^3 x - 16\cos^3 x + \cos x}{2\cos x - 8\cos^3 x}$$

$$= \frac{\cos x(1-8\cos^2 x)}{2\cos x(1-4\cos^2 x)} = \frac{1-\frac{8}{5}}{2\left(1-\frac{4}{5}\right)} = -\frac{3}{2}.$$

6.34. **a)** $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x.\cos x = 1 + 2m$

$\Rightarrow \quad \sin x + \cos x = \pm\sqrt{1+2m}$ (ĐK $1 + 2m \geq 0$).

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2m^2$.

6.35. **a)** Từ giả thiết $0 < x < 90^0$ nên $\cot x > 0$

$$\cot x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}}{2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{9}{7}.$$

b) Vì $\cot x = -3$ suy ra $\sin x \neq 0$.

Chia tử và mẫu của B cho $\sin^2 x$ thì được :

$$B = \frac{1 + 2\cot x - 2\cot^2 x}{2 - 3\cot x + 4\cot^2 x} = \frac{1 - 6 - 18}{2 + 9 + 36} = -\frac{23}{47}.$$

§3. Một số công thức lượng giác

6.51. $\sin 22^0 30' = \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^0}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\cos 22^0 30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\sin 11^0 15' = \sqrt{\frac{1-\cos 22^0 30'}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\cos 11^0 15' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}.$$

6.52. Với $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ thì $\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\sin x = \frac{4}{5}$, $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = -\frac{7}{25}$$

$$\tan x = \frac{24}{7}.$$

6.53. Với $90^0 < x < 135^0$ thì $180^0 < 2x < 270^0$

$\sin x > 0$, $\cos x < 0$, $\sin 2x < 0$, $\cos 2x < 0$

$$\cos 2x = -\sqrt{1 - \sin^2 2x} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \qquad \cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan x = -2.$$

6.54. **a)** $$A = \frac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0 \cos 10^0} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^0}$$

$$= \frac{4(\cos 60^0 \cos 10^0 - \sin 60^0 \sin 10^0)^2}{\sin 20^0} = \frac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin 20^0} = 4.$$

b) $$B = \sin 15^0 + \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0}\cos 15^0 = \frac{\sin 15^0 \cos 30^0 + \sin 30^0 \cos 15^0}{\cos 30^0}$$

$$= \frac{\sin 45^0}{\cos 30^0} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

c) $$C = \frac{\cot 45^0 - \cot 71^0.\cot 79^0}{\cot 79^0 + \cot 71^0} = \frac{1 - \tan 19^0 \tan 11^0}{\tan 11^0 + \tan 19^0}$$

$$= \frac{1}{\tan(11^0 + 19^0)} = \cot 30^0 = \sqrt{3}$$

6.55. **a)** $VT = \dfrac{2\sin x(1-\cos x)}{2\sin x(1+\cos x)} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \tan^2\dfrac{x}{2}$

b) $VP = \dfrac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$= \dfrac{(\cos x-\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)} = \dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$

c) $\sin a.\sin(b-c) = \sin a(\sin b.\cos c - \sin c.\cos b)$

$= \sin a.\sin b.\cos c - \sin a.\sin c.\cos b$

Tương tự : $\sin b.\sin(c-a) = \sin b.\sin c.\cos a - \sin b.\sin a.\cos c$

$\sin c.\sin(a-b) = \sin c.\sin a.\cos b - \sin c.\sin b.\cos a$

Cộng các vế với các đẳng thức trên ta được đpcm.

d) $VT = \dfrac{2\sin 2x(1-\cos 2x)}{2\sin 2x(1+\cos 2x)} = \dfrac{2\sin^2 x}{2\cos^2 x} = \tan^2 x$.

6.56. **a)** $VT = \tan x\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan x}\cdot\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan x}$

$= \dfrac{\sin x(3-tg^2 x)}{\cos x(1-3tg^2 x)} = \dfrac{\sin x(3\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos x(\cos^2 x-3\sin^2 x)}$

$= \dfrac{\sin x[3(1-\sin^2 x)-\sin^2 x]}{\cos x[\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)]} = \dfrac{3\sin x-4\sin^3 x}{4\cos^3 x-3\cos x} = \dfrac{\cos 3x}{\cos 3x} = \tan 3x$.

b) $VT = 4\cos x\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos x-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)$

$= 4\cos x\left[\left(\dfrac{1}{2}\cos x\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\right] = 4\cos^3 x-3\cos x = \cos 3x.$

c) $VT = 4\sin x\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos x+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin x\right)$

$= 4\sin x\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\sin x\right)^2\right]$

$= 3\sin x-4\sin^3 x = \sin 3x.$

6.57. **a)** $A = \cos^2 x - (\sin 30^\circ \cos x + \cos 30^\circ \sin x)(\sin 30^\circ \cos x - \cos 30^\circ \sin x)$

$= \cos^2 x - \left[\left(\frac{1}{2}\cos x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2\right] = \frac{3}{4}$ không phụ thuộc x.

b) $B = \sin^2 x + \left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos x + \cos\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi}{3}\cos x - \cos\frac{2\pi}{3}\sin x\right)^2$

$= \sin^2 x + 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin x\right)^2\right] = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc x.

c) $C = (2\cos^2 x)^2 - 2\cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1)$

$= (1 + \cos 2x)^2 - 2\cos 2x - \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) = \frac{3}{2}$ không phụ thuộc x.

6.58. Ta có $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}$

$$\Rightarrow \cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A+B}{2} = \frac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cot\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cot\frac{B}{2}}}{1 - \frac{1}{\cot\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\cot\frac{B}{2}}} = \frac{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2} - 1}$$

$$\Rightarrow \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$$

6.59. **a)** Nhân A với $2\sin\frac{\pi}{7}$, ta được :

$$2A\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

$$= \left[\sin\left(\frac{2\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right)\right] + \left[\sin\left(\frac{4\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right)\right] +$$

$$+ \left[\sin\left(\frac{6\pi}{7} + \frac{\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{6\pi}{7} - \frac{\pi}{7}\right)\right] = -\sin\frac{\pi}{7}$$

Suy ra $A = -\frac{1}{2}$.

b) Làm tương tự câu a) ta có kết quả $B = \frac{1}{2}$.

c) Ta có : $\cos\frac{5\pi}{7} = -\cos\left(\pi - \frac{5\pi}{7}\right) = -\cos\frac{2\pi}{7}$.

Do đó $C = -\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$

$$\Rightarrow \quad -2C\sin\frac{\pi}{7} = 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{2}\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{1}{4}\sin\frac{8\pi}{7} = -\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{8}.$$

6.60. Từ điều kiện $\sin x = 2\sin(x + y)$ suy ra $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Bởi vì nếu $x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $|\sin x| = 2$ là không thể có.

Với $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ thì $\tan(x + y)$ xác định

$\sin x = 2\sin(x + y) \quad \Leftrightarrow \quad \sin[(x + y) - y] = 2\sin(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x + y)\cos y - \cos(x + y)\sin y = 2\sin(x + y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x + y)[\cos y - 2] = \cos(x + y)\sin y$

$\Leftrightarrow \quad \tan(x + y) = \dfrac{\sin y}{\cos y - 2}$ (Đpcm).

6.61. $3\sin 2x - 2\sin 2y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 2y = \dfrac{3\sin 2x}{2}$

$3\sin^2 x + 2\sin^2 y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 3\sin^2 x$ ·

Ta lại có : $\cos(x + 2y) = \cos x\cos 2y - \sin x\sin 2y$

$= \cos x(3\sin^2 x) - \sin x(3\sin x\cos x) = 0$

Suy ra $x + 2y = \frac{\pi}{2}$ (vì x, y nhọn $0 < x < 2y < \frac{3\pi}{2}$)

6.62. Giả thiết : $\sin y = \sin x\cos(x+y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin[(x+y)-x] = \sin x\cos(x+y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x+y)\cos x - \sin x\cos(x+y) = \sin x\cos(x+y)$

$\Leftrightarrow \quad \sin(x+y)\cos x = 2\sin x\cos(x+y)$

$\Leftrightarrow \quad 2\tan x = \tan(x+y)$

6.63. $\cos(x+y) = 2\cos(x-y) \Leftrightarrow \cos x\cos y - \sin x\sin y = 2\cos x\cos y + 2\sin x\sin y$

$$\Leftrightarrow \cos x\cos y = -3\sin x\sin y \quad \Leftrightarrow \tan x\tan y = -\frac{1}{3}.$$

6.64. a) $A = \dfrac{(1+\cos 2x)+(\cos x+\cos 3x)}{2\cos^2 x+\cos x-1} = \dfrac{2\cos^2 x+2\cos 2x\cos x}{2\cos^2 x+\cos x-1}$

$$= \frac{2\cos x(\cos x+\cos 2x)}{\cos x+\cos 2x} = 2\cos x$$

b) $B = \dfrac{\sin 5x+2\sin 5x\cos x}{\cos 5x+2\cos 5x\cos x} = \dfrac{\sin 5x(1+2\cos x)}{\cos 5x(1+2\cos x)} = \tan 5x.$

6.65. a) Ta có : $A+B+C=\pi \quad \Rightarrow \quad C = \pi-(A+B)$

$$(\sin A+\sin B)+\sin C = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}.$$

b) $(\cos A+\cos B)+\cos C = 2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}+1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$

$$= 1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$= 1+2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$= 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

6.66. a) $A = \dfrac{1}{2}(\cos 60^0+\cos 40^0)\cos 70^0 = \dfrac{1}{4}\cos 70^0+\dfrac{1}{2}\cos 40^0\cos 70^0$

$$= \frac{1}{4}\cos 70^0+\frac{1}{4}(\cos 30^0+\cos 110^0)$$

$$A = \frac{1}{4}(\cos 70^0 - \cos 70^0) + \frac{1}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

b) $$B = \frac{1}{2}(\cos 60^0 + \cos 20^0)\cos 80^0 = \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{2}\cos 20^0 \cos 80^0$$

$$= \frac{1}{4}\cos 80^0 + \frac{1}{4}(\cos 100^0 + \cos 60^0)$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 80^0 + \cos 100^0) + \frac{1}{4}\cos 60^0$$

$$= \frac{1}{4}(\cos 80^0 - \cos 80^0) + \frac{1}{4}.\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG VI

6.67. a) $A = -\sin x + \cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) = -\sin x - \cos x + \sin x = -\cos x$

b) $$B = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2} - 6\pi\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2} -\right.$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin x + \cos x - \sin x - \cos x = -2\sin x.$$

6.68. a) $$A = \left(\cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10}\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{10} + \cos\frac{8\pi}{10}\right) + \ldots$$

$$= \cos\frac{\pi}{10} + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) + \cos\frac{2\pi}{10} + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{10}\right) + \ldots + \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$= \cos\frac{\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{2\pi}{10} - \cos\frac{2\pi}{10} + \ldots = 0.$$

b) $$B = \left(\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{5\pi}{6}\right) + \left(\cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\frac{11\pi}{11}\right) + \cos^2\frac{13\pi}{18} + \cos^2\frac{2\pi}{9}$$

$$= \cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\frac{\pi}{9} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{9}\right) + \cos$$

$$= \left(\cos^2\frac{\pi}{3} + \sin^2\frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{\pi}{9}\right) + \left(\cos^2\frac{2\pi}{9} + \sin^2\frac{2\pi}{9}\right) = 3.$$

6.69. $$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} = 3$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x = \frac{2}{3}, \quad \cos 2x = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad \tan 2x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 4x = \frac{1}{9}; \qquad \tan 4x = 4\sqrt{5}.$$

6.70. a) $$A = \frac{\sin 18^0 \cos 28^0 + \cos(90^0 + 18^0)\sin(180^0 + 28^0)}{\sin 34^0 \sin(90^0 + 56^0) + \sin(180^0 + 56^0)\sin(360^0 - 56^0)}$$

$$= \frac{\sin 28^0 \cos 18^0 + \sin 18^0 \sin 28^0}{\sin 34^0 \cos 56^0 + \sin 56^0 \cos 34^0} = \frac{\sin 46^0}{\sin 90^0} = \sin 46^0.$$

b) $$B = \frac{1 + \tan x\tan y}{1 - \tan x\tan y} = \frac{\cos x\cos y + \sin x\sin y}{\cos x\cos y - \sin x\sin y} = \frac{\cos(x - y)}{\cos(x + y)}.$$

c) $$C = \frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y} + \left(\frac{\sin x\cos y + \sin y\cos x}{\cos x\cos y}\right)\cdot\frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)}$$

$$= \frac{\sin x\sin y + \cos x\cos y - \sin x\sin y}{\cos x\cos y} = 1.$$

d) $$D = \frac{\cos x}{\sqrt{2}\sin x} - \frac{\sin x}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2}\sin x\cos x}$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \sqrt{2}\cot 2x.$$

6.71. a) $$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

b) $$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x - \cos\frac{\pi}{4}\cos x\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

c) $(\tan x + \tan y)\cot(x + y) + (\tan x - \tan y)\cot(x - y) =$

$$= \frac{\sin(x + y)}{\cos x\cos y}\cdot\frac{\cos(x + y)}{\sin(x + y)} + \frac{\sin(x - y)}{\cos x\cos y}\cdot\frac{\cos(x - y)}{\sin(x - y)}$$

$$= \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{\cos x\cos y} = \frac{2\cos x\cos y}{\cos x\cos y} = 2.$$

d) $(\cos 70^0 + \cos 50^0)(\cos 310^0 + \cos 290^0) + (\cos 40^0 + \cos 160^0)(\cos 320^0 - \cos 380^0$

$= (\cos 70^0 + \cos 50^0)[\cos(360^0 - 50^0) + \cos(360^0 - 70^0)] +$

$+[\cos 40^0 + \cos(180^0 - 20^0)][\cos(360^0 - 40^0) - \cos 20^0$

$= (\cos 70^0 + \cos 50^0)^2 + [\cos 40^0 - \cos 20^0]^2$

$= \cos^2 70^0 + \cos^2 50^0 + 2\cos 70^0\cos 50^0 + \sin^2 50^0 + \sin^2 70^0 - 2\sin 50^0 \sin 7$

$= 2 + 2\cos(70^0 + 50^0) = 2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$

6.72. a) $A = 2[(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3] - 3[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x]$

$= 2[\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x] - 3(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x)$

$= 2[1 - 3\sin^2 x\cos^2 x] - 3(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) = -1$

b) $B = \cos^2 x + \cos(a + x)[\cos(a + x) - 2\cos a\cos x]$

$= \cos^2 x + \cos(a + x)[-\cos(a - x)]$

$= \cos^2 x - \cos^2 a\cos^2 x + \sin^2 a\sin^2 x$

$= \cos^2 x(1 - \cos^2 a) + (1 - \cos^2 a)\sin^2 x$

$= (1 - \cos^2 a)(\cos^2 x + \sin^2 x)$

$= 1 - \cos^2 a$ (không phụ thuộc vào x).

c) $C = \cos^2 x - \sin(a + x)[2\sin a\cos x - \sin(a + x)$

$= \cos^2 x - \sin(a + x)[+\sin(a - x)]$

$= \cos^2 x - \sin^2 a\cos^2 x + \sin^2 x\cos^2 a$

$= \cos^2 x[1 - \sin^2 a] + (1 - \sin^2 a)\sin^2 x$

$= (\cos^2 x + \sin^2 x)(1 - \sin^2 a)$

$= \cos^2 a$ (không phụ thuộc vào x).

6.73. a) Đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] = \sin\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B + C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B + C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B + C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B + C}{2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\frac{A + B + C}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0$ **(Đúng).**

b) Ta có : $\sin\frac{A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\frac{B+C}{2}\right)$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \cos^2\left(\frac{B+C}{2}\right) = \left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]^2$$

$$= \cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2} + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= \left(1 - \sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1 - \sin^2\frac{C}{2}\right) + \sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2} - 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 1 - \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$= 1 - \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

6.74. $A = \dfrac{(\sin x + \sin 7x) + (\sin 3x + \sin 5x)}{(\cos x + \cos 7x) + (\cos 3x + \cos 5x)} = \dfrac{2\sin 4x\cos 3x + 2\sin 4x\cos x}{2\cos 4x\cos 3x + 2\cos 4x\cos x}$

$= \tan 4x.$

6.75. a) $VT = \dfrac{\cos 10^0 - \sqrt{3}\sin 10^0}{\sin 10^0\cos 10^0} = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^0\right)}{\frac{1}{2}\sin 20^0}$

$= \dfrac{4\cos(60^0 + 10^0)}{\sin 20^0} = 4.$

b) $VT = \frac{1}{2}[\cos(5x + 3x) + \cos(5x - 3x)] - \frac{1}{2}[\cos(7x + x) - \cos(7x - x)]$

$= \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x) = \cos 4x\cos 2x.$

6.76. a) $VT = a\dfrac{\sin B}{\sin A}\cos B + a\dfrac{\sin C}{\sin A}\cos C = \dfrac{a}{2\sin A}(\sin 2B + \sin 2C)$

$= \dfrac{2a\sin(B + C)\cos(B - C)}{2\sin A} = a\cos(B - C)$ (vì $\sin(B + C) = \sin A$)

b) $\Leftrightarrow \quad 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2} = \dfrac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$\Leftrightarrow \quad 2\sin^2\dfrac{A}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \cos A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 90^0.$

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. D.

2. **a)** $A \cup B = (1; 7)$, $A \cap B = (4; 5)$, $B \cap C = (4; 6)$.

b) $A \cap B \cap C = A \cap B = (4; 5)$

$[a; b] \subset \{A \cap B \cap C\} \Leftrightarrow 4 < a \leq b < 5$.

3. **a)** $D = (-\infty; 3] \setminus \{-1; 1\}$. **b)** $D = [5; 10)$.

c) $D = \left(-\infty; -\dfrac{9}{2}\right] \cup \left(-\dfrac{10}{2}; 1\right) \cup [2; +\infty)$.

4. **a)** Nghịch biến. **b)** Đồng biến. **c)** Nghịch biến.

5. $k = -\dfrac{1}{2}$.

6. **a)** $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 2$, $c = 6$. **b)** $a = b = 2$, $c = -1$.

7. $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = -2$, $c = 1$.

8. $y < 0$ với $-1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$.

9. Nếu $m < -4$ hoặc $m = 4$, vô nghiệm

Nếu $m = -4$, mọi $x \in [2; +\infty)$ đều là nghiệm

Nếu $m = 4$, mọi $x \in (-\infty; -2]$ đều là nghiệm

Nếu $-4 < m < 4$, nghiệm $x = -\dfrac{m}{2}$.

10. **a)** Nếu $m \neq 1$, $x = m + 2$.

Nếu $m = 1$, mọi $x \in R$ đều là nghiệm.

b) Nếu $m = 2$, phương trình vô nghiệm

Nếu $m = 1$, mọi $x \in R$ đều là nghiệm.

11. **a)** $m = 11$, $x_2 = \dfrac{6}{11}$. **b)** $m = 2$, $x_2 = 1$.

12. **a)** $m < 3$. **b)** $m = \dfrac{3}{5}$.

13. **a)** Nếu $m < 3$, có 2 nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3 - m}$

Nếu $m = 3$, có nghiệm kép $x = 2$

Nếu $m > 3$, vô nghiệm.

b) Nếu $m \neq -1$ và $\dfrac{6 - \sqrt{84}}{3} < m < \dfrac{6 + \sqrt{84}}{3}$, có 2 nghiệm

$$x_{1,2} = \frac{m + 2 \pm \sqrt{-3m^2 + 12m + 16}}{2(m + 1)}$$

Nếu $m < \dfrac{6 - \sqrt{84}}{3}$ hoặc $m > \dfrac{6 + \sqrt{84}}{3}$, vô nghiệm

Nếu $m = \dfrac{6 \pm \sqrt{84}}{3}$, có nghiệm kép $x_{1,2} = \dfrac{m + 1}{2(m + 1)}$.

14. **a)** $m > -\dfrac{13}{4}$. **b)** $m = 12$.

15. **a)** Nếu $m \neq -\dfrac{5}{2}$, phương trình có nghiệm $x = 2(m + 1)$

Nếu $m = -\dfrac{5}{2}$, phương trình vô nghiệm.

b) ĐKXĐ : $-x^2 + x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

$|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2 \Rightarrow 2x^2 + m - 2 = 0$ hoặc $2x + 2 + m = 0$

Nếu $m < -6$ hoặc $m > 2$, vô nghiệm

Nếu $-6 \leq m \leq 0$, có 2 nghiệm $x_1 = \dfrac{-m - 1}{2}$ và $x = \sqrt{\dfrac{2 - m}{2}}$

Nếu $0 \leq m \leq 2$, có 2 nghiệm $x = \pm\sqrt{\dfrac{2 - m}{2}}$.

16. **a)** Nếu $m \neq \pm 1$, nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{2m + 1}{m + 1}; \dfrac{m}{m + 1}\right)$

Nếu $m = -1$, vô nghiệm

Nếu $m = 1$, vô số nghiệm dạng $(a; 2 - a)$ $a \in R$.

b) Nếu $m \neq -3$ và $m \neq 2$, nghiệm duy nhất $\left(\dfrac{m + 8}{3m + 9}; \dfrac{m - 2}{3m + 9}\right)$

Nếu $m = -3$, vô nghiệm

Nếu $m = 2$, vô số nghiệm dạng $\left(\dfrac{2}{3}(a + 1); a\right)$ $a \in R$.

17. **a)** (16; 9) và (8; 15). **b)** (1; 2) và (2; 1).

18. **a)** $(a + b)(1 + ab) \geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{1.ab} = 4ab$.

b) $\dfrac{a + bc^4}{2c^2} \geq 2\sqrt{\dfrac{a}{2c^2} \cdot \dfrac{bc^2}{2}} = \sqrt{ab}$.

19. **a)** $f(x) = 2 + 2(x - 1) + \dfrac{1}{x + 1} \geq 2 + 2\sqrt{2(x - 1)\dfrac{1}{x - 1}} = 2 + 2\sqrt{2}$

f(x) đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2 + 2\sqrt{2}$ khi $x = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $f^2(x) = 8 + 2\sqrt{(x + 5)(3 - x)}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 khi $x = -1$

f(x) đạt giá trị lớn nhất bằng 4.

20. **a)** $\Leftrightarrow \quad (m - 1)^2 x \geq -(m + 1)$

Nếu $m \neq 1$, tập nghiệm $S = \left[-\dfrac{m + 1}{(m - 1)^2}; +\infty\right)$

Nếu $m = 1$, mọi $x \in R$ đều là nghiệm.

b) Nếu $m < -\dfrac{13}{8}$ hoặc $m > 1$, tập nghiệm $T = \left(\dfrac{5}{m + 1}; +\infty\right)$

Nếu $-\dfrac{13}{8} \leq m \leq -1$, tập nghiệm $T = (-8; +\infty)$

Nếu $-1 < m < 1$, tập nghiệm $T = \left(-8; \dfrac{5}{m + 1}\right)$

Nếu $m = 1$, hệ vô nghiệm.

21. **a)** $m < \dfrac{-2 - \sqrt{2}}{4}$ hoặc $m > \dfrac{-2 + \sqrt{2}}{4}$. **b)** $m < -4$ hoặc $m > -\dfrac{1}{3}$.

22. **a)** $-7 - \sqrt{52} < m < -7 + \sqrt{52}$. **b)** $m < \dfrac{1}{2}$ hoặc $m > 1$.

23. $m \in \left(-9; -\dfrac{3}{7}\right) \setminus \{-3\}$.

24. **a)** $x = 3$. **b)** $x_1 = 8$, $x_2 = 3 + \sqrt{11}$. **c)** $(-\infty; -2] \cup (14; +\infty)$.

25. **a)** $\sin 2x = \dfrac{4}{5}$; $\cos 2x = -\dfrac{3}{5}$; $\tan 2x = -\dfrac{4}{3}$.

b) $\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$; $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$; $\tan\dfrac{x}{2} = 5$.

MỤC LỤC

Phần I. KIẾN THỨC CƠ BẢN – VÍ DỤ – BÀI TẬP

Chương I. MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

§1. Mệnh đề 3
§2. Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học 7
§3. Tập hợp. Các phép toán trên tập hợp 14
§4. Sai số. Cách viết chuẩn số gần đúng 20
Bài tập ôn chương I 22

Chương II. HÀM SỐ BẬC NHẤT, HÀM SỐ BẬC HAI

§1. Khái niệm hàm số 23
§2. Hàm số bậc nhất và một vài hàm số liên quan 29
§3. Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 34
Bài tập ôn chương II 38

Chương III. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Khái niệm phương trình. Phương trình bậc nhất một ẩn 39
§2. Phương trình, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn 44
§3. Phương trình bậc hai một ẩn 55
§4. Một số hệ phương trình bậc hai hai ẩn đặc biệt 62
Bài tập ôn chương III 68

Chương IV. BẤT ĐẲNG THỨC, BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức 70
§2. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 86
§3. Dấu của nhị thức 91
§4. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 97
§5. Dấu của tam thức bậc hai. Bất phương trình bậc hai 99
§6. Một số phương trình, bất phương trình quy về bậc hai 110
Bài tập ôn chương IV 113

Chương V. THỐNG KÊ

§1. Bảng phân phối thực nghiệm tần số, tần suất 115
§2. Các số đặc trưng 119

Chương VI. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. Góc và cung lượng giác 125
§2. Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 129
§3. Một số công thức lượng giác 137
Bài tập ôn chương VI 148
Bài tập ôn cuối năm 150

Phần II. LỜI GIẢI, HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI CÁC BÀI TẬP

Chương I 153
Chương II 158
Chương III 168
Chương IV 187
Chương V 210
Chương VI 213
Bài tập ôn cuối năm 228

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại: (04) 9715012; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

* * *

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Chịu trách nhiệm nội dung:

Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG
Sửa bài: PHƯƠNG THẢO

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

TOÁN CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO 10 TẬP 1

Mã số: 1L - 88 ĐH 2006
In 2.000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xưởng in Công ty phát triển CN Truyền hình TP. HCM.
Số xuất bản: 41 - 2006/CXB/ 14 – 282/ĐHQG HN, ngày 10/01/2006.
Quyết định xuất bản số: 228 LK/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.